EXERCICE 4 **7 points**

Commun à tous les candidats

Le but de l'exercice est de montrer que l'équation (E) : $e^x = \dfrac{1}{x}$, admet une unique solution dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, et de construire une suite qui converge vers cette unique solution.

I. Existence et unicité de la solution

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - e^{-x}$.

1. Démonter que x est solution de l' équation (E) si et seulement si $f(x) = 0$.
2. Étude du signe de la fonction f
   a. Étudier le sens de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   b. En déduire que l'équation (E) possède une unique solution sur $\mathbb{R}$, notée α.
   c. Démontrer que α appartient à l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2}\ ;\ 1\right]$.
   d. Étudier le signe de f sur l'intervalle $[0\ ;\ \alpha]$.

II. Deuxième approche

On note g la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; 1]$ par : $g(x) = \dfrac{1+x}{1+e^x}$.

1. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ est équivalente à l'équation $g(x) = x$.
2. En déduire que α est l'unique réel vérifiant : $g(\alpha) = \alpha$.
3. Calculer $g'(x)$ et en déduire que la fonction g est croissante sur l'intervalle $[0\ ;\ \alpha]$.

III. Construction d'une suite de réels ayant pour limite α

On considéra la suite (u_n) définie par : $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, par : $u_{n+1} = g(u_n)$.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n : $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$.
2. En déduire que la suite (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.
3. Justifier l'égalité : $g(\ell) = \ell$. En déduire la valeur de ℓ.
4. À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée de u_4 arrondie à la sixième décimale.

Exercice 4

Partie I

1. (E) : $\mathrm{e}^x = \dfrac{1}{x} \iff x\,\mathrm{e}^x = 1 \iff x = \mathrm{e}^{-x} \iff x - \mathrm{e}^{-x} = 0 \iff f(x) = 0$

2. (a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = 1 + \mathrm{e}^{-x}$. Or pour tout réel x, $\mathrm{e}^{-x} > 0$. Donc pour tout réel x, $f'(x) > 1 > 0$.
   Ainsi la fonction $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}}$

   (b) • $f(0) = -1$. Alors $x < 0 \Longrightarrow f(x) < f(0) \Longrightarrow f(x) < -1 \Longrightarrow f(x) < 0$
   L'équation $f(x) = 0$ n'admet aucune solution dans l'intervalle $]-\infty\,,0[$.

   • $f(1) = 1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}}$. Alors $x > 1 \Longrightarrow f(x) > f(1) \Longrightarrow f(x) > 1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}} \Longrightarrow f(x) > 0$

• La fonction f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[0, 1]$. Donc d'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, f réalise une bijection de $[0, 1]$ sur l'intervalle image de $[0, 1]$ par f à savoir

$$f([0,1]) = [f(0), f(1)] = \left[-1, 1-\frac{1}{\mathrm{e}}\right]$$

Puisque $0 \in f([0,1])$, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0, 1]$.

(c) • $f\left(\frac{1}{2}\right) \approx -0,1$ à 10^{-1} près par excès.

• $f(1) \approx 0,6$ à 10^{-1} près par défaut.

• Donc $f(1/2) \leq -0,1 < 0 < 0,6 \leq f(1)$ avec $0 = f(\alpha)$

d'où $f\left(\frac{1}{2}\right) < f(\alpha) < f(1)$

Il en résulte par croissance de f sur $\mathbb{R}$ que $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$

(d) $x \in [0, \alpha] \Longrightarrow f(0) \leq f(x) \leq f(\alpha) \Longrightarrow -1 \leq f(x) \leq 0$ car $f(\alpha) = 0$
Ainsi f est négative sur $[0, \alpha]$.

Partie II

1. $g(x) = x \Longleftrightarrow \frac{1+x}{1+\mathrm{e}^x} = x \Longleftrightarrow 1+x = x(1+\mathrm{e}^x) \Longleftrightarrow 1+x = x + x\mathrm{e}^x$
$\Longleftrightarrow 1 = x\mathrm{e}^x \Longleftrightarrow \mathrm{e}^x = \frac{1}{x}$

2. On a vu en I-2.(b) que α était l'unique solution dans $[0, 1]$ de l'équation $f(x) = 0$ qui est équivalente à $g(x) = x$.
En conséquence α est l'unique solution dans $[0, 1]$ de l'équation $g(x) = x$.

3. La fonction g est dérivable sur $[0, 1]$ et pour tout x de $[0, 1]$,

$$g'(x) = \frac{1(1+\mathrm{e}^x) - (1+x)\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2} = \frac{1+\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2} = \frac{1-x\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2} = \frac{-\mathrm{e}^x(x-\mathrm{e}^{-x})}{(1+\mathrm{e}^x)^2}$$

Donc pour tout x de $[0, 1]$, $\boxed{g'(x) = \frac{-\mathrm{e}^x f(x)}{(1+\mathrm{e}^x)^2}}$

Puisque $\frac{\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2} > 0$, $g'(x)$ et $f(x)$ sont de signes contraires.
Donc, d'après I - 2 (d), f étant positive sur $[0, \alpha]$, pour tout x de $[0, \alpha]$, $g'(x) \geq 0$.
Ainsi la fonction g est croissante sur $[0, \alpha]$.

Partie III

1. Pour tout entier naturel n, notons $\mathscr{P}_n$ la propriété : « $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$ »

• **Initialisation** : vérifions la propriété au rang 0.
$u_0 = 0$ et $u_1 = g(0) = 1/2$. Or d'après I-2.(c), $\frac{1}{2} \leq \alpha$. Donc $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq \alpha$.

• **Hérédité** : soit $k \in \mathbb{N}^*$. Supposons la propriété $\mathscr{P}_k$ vraie. Démontrons alors, sous cette hypothèse, que $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie.
On sait que g est croissante sur $[0, \alpha]$.
Or, d'après l'hypothèse de récurrence, $0 \leq u_k \leq u_{k+1} \leq \alpha$
Donc $g(0) \leq g(u_k) \leq g(u_{k+1}) \leq g(\alpha)$
avec $g(0) = 1/2$; $g(u_k) = u_{k+1}$; $g(u_{k+1}) = u_{k+2}$ et $g(\alpha) = \alpha$
Par conséquent $0 \leq \frac{1}{2} \leq u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq \alpha$ et $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie.

• **Conclusion** : le principe de récurrence permet de conclure que pout tout entier naturel n, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$

2. $\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante}}$

Cette suite est également majorée par α. Il en résulte d'après le théorème de convergence monotone, que la suite $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est convergente}}$

3. Notons ℓ la limite de la suite (u_n). Alors il est clair que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$
Puisque $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq \alpha$, on obtient par passage à la limite dans cet encadrement : $0 \leq \ell \leq \alpha$. En particulier

D'où $\lim\limits_{x \to \ell} g(x) = g(\ell)$. On en déduit par composition que $\lim\limits_{n \to +\infty} g(u_n) = g(\ell)$
Or par définition de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $g(u_n) = u_{n+1}$.
Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = g(\ell)$. Par unicité de la limite d'une suite, on en déduit que $\boxed{g(\ell) = \ell}$ autrement dit ℓ est une solution dans $[0, 1]$ de l'équation $g(x) = x$.

Or cette équation admet α pour unique solution. Donc $\boxed{\ell = \alpha}$

4. La calculatrice fournit $\boxed{u_4 \approx 0,567\,143}$ à 10^{-6} près par défaut (valeur arrondie).