EXERCICE 3 (5 points)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

On considère l'équation : (E) $z^3-(4+i)\ z^2+(13+4i)\ z-13i=0$ où z est un nombre complexe.

1) Démontrer que le nombre complexe i est solution de cette équation.

2) Déterminer les nombres réels a, b et c tels que, pour tout nombre complexe z on ait :
$z^3-(4+i)\ z^2+(13+4i)\ z-13i=(z-i)(az^2+bz+c)$.

3) En déduire les solutions de l'équation (E).

Partie B

Dans le plan complexe, rapporté au repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, on désigne par A, B et C les points d'affixes respectives i, 2 +3i et 2 − 3i.

1) Soit r la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{4}$. Déterminer l'affixe du point A′, image du point A par la rotation r.

2) Démontrer que les points A′, B et C sont alignés et déterminer l'écriture complexe de l'homothétie de centre B qui transforme C en A′.

EXERCICE 3 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité Partie A

Soit (E) l'équation $z^3-(4+i)z^2+(13+4i)z-13i=0$.

1. On a : $i^3-(4+i)i^2+(13+4i)i-13i=-i+4+i-4+13i-13i=0$ donc i est solution de (E).
2. $(z-i)(az^2+bz+c)=az^3+(b-ai)z^2+(c-bi)z-ic$.
   Deux polynômes sont égaux si et seulement si les coefficients sont égaux. On obtient le système :
   $$\begin{cases} a &= 1\\ b-ai &= -4-i\\ c-bi &= 13+4i\\ -ic &= -13i\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a &= 1\\ c &= 13\\ b-i &= -4-i\\ 13-bi &= 13+4i\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a &= 1\\ b &= -4\\ c &= 13\end{cases}$$
   donc $z^3-(4+i)z^2+(13+4i)z-13i=(z-i)(z^2-4z+13)$.
3. L'équation (E) s'écrit $(z-i)(z^2-4z+13)=0$.
   Dans $\mathbb{C}$, un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul.
   - $z-i=0 \Leftrightarrow z=i$
   - $z^2-4z+13=0$.
     $\Delta=-36=(6i)^2<0$. Il y a deux racines complexes conjuguées $\frac{4-6i}{2}=2-3i$ et $2+3i$.

   L'ensemble des solutions est : $\mathcal{S}=\{i\,;\,2-3i\,;\,2+3i\}$

Partie B

1. Soit r la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{4}$.
   Une écriture complexe de r est $z'-z_B=e^{i\frac{\pi}{4}}(z-z_B) \Leftrightarrow z'=e^{i\frac{\pi}{4}}(z-2-3i)+2+3i$.
   On en déduit $z_{A'}=e^{i\frac{\pi}{4}}(-2-2i)+2+3i=-2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(10+i)+2+3i=-2i\sqrt{2}+2+3i=2+\left(3-2\sqrt{2}\right)i$.
2. Les affixes de A', B et C ont la même partie réelle 2 donc les trois points sont alignés sur la droite d'équation réduite $x=2$.
   A' est donc l'image de C par une homothétie de centre B et de rapport k. $k>0$ donc $k=\frac{BA'}{BC}=\frac{3-(3-2\sqrt{2})}{3-(-3)}=\frac{2\sqrt{2}}{6}=\frac{\sqrt{2}}{3}$.
   Une écriture complexe de cette homothétie est alors :
   $z'=k(z-z_B)+z_B$ c'est-à-dire $z'=\frac{\sqrt{2}}{3}(z-2-3i)+2+3i$.