EXERCICE 2 (3 points)

Commun à tous les candidats

1) Restitution organisée de connaissances

Démontrer la formule d'intégration par parties en utilisant la formule de dérivation d'un produit de deux fonctions dérivables, à dérivées continues sur un intervalle $[a\,;\,b]$.

2) Soient les deux intégrales définies par $I = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^x \sin x \, \mathrm{d}x$ et $J = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^x \cos x \, \mathrm{d}x$.

a) Démontrer que $I = -J$ et que $I = J + \mathrm{e}^{\pi} + 1$.

b) En déduire les valeurs exactes de I et de J.

EXERCICE 2 **3 points**

1. **Restitution organisée de connaissances**
Soient u et v deux fonctions dérivables sur $[a\,;\,b]$ et dont les dérivées sont continues. Alors uv est dérivable et $(uv)' = u'v + uv'$.
Par conséquent, $u'v = (uv)' - uv'$ et ce sont des fonctions continues d'où $\int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b [(uv)'(x) - u(x)v'(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b (uv)'(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$ (linéarité de l'intégrale) $= [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$.
2. On pose $\mathrm{I} = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^x \sin x\,\mathrm{d}x$ et $\mathrm{J} = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^x \cos x\,\mathrm{d}x$.

   a. Première méthode : on pose $u'(x) = \mathrm{e}^x$ d'où $u(x) = \mathrm{e}^x$ et $v(x) = \sin x$ d'où $v'(x) = \cos x$.
   u et v sont dérivables et leurs dérivées sont continues. On effectue une intégration par parties :
   $\mathrm{I} = [\mathrm{e}^x \sin x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \mathrm{e}^x \cos x\,\mathrm{d}x = -\mathrm{J}$ donc $\mathrm{I} = -\mathrm{J}$.

   Deuxième méthode :
   on pose $u(x) = \mathrm{e}^x$ donc $u'(x) = \mathrm{e}^x$ et $w'(x) = \sin x$ d'où $w(x) = -\cos x$.
   u' et w' sont continues. On intègre par parties :
   $\mathrm{I} = [-\mathrm{e}^x \cos x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -\mathrm{e}^x \cos x\,\mathrm{d}x = 1 + \mathrm{e}^{\pi} + \mathrm{J}$ donc $\mathrm{I} = 1 + \mathrm{e}^{\pi} + \mathrm{J}$.
   On obtient le système :
   $\begin{cases} \mathrm{I} = -\mathrm{J} \\ \mathrm{I} = 1 + \mathrm{e}^{\pi} + \mathrm{J} \end{cases}$.
   On obtient : $\mathrm{I} = \dfrac{1}{2}(1 + \mathrm{e}^{\pi})$ et $\mathrm{J} = -\dfrac{1}{2}(1 + \mathrm{e}^{\pi})$

Intégrale métropole 2007