

**EXERCICE 1****4 points****Commun à tous les candidats**

1. Soit  $f$  la fonction définie sur  $[1 ; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$  et soit  $H$  la fonction définie sur  $[1 ; +\infty[$  par  $H(x) = \int_1^x f(t) dt$ .
- Justifier que  $f$  et  $H$  sont bien définies sur  $[1 ; +\infty[$
  - Quelle relation existe-t-il entre  $H$  et  $f$  ?
  - Soit  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  du plan. Interpréter en termes d'aire le nombre  $H(3)$ .
2. On se propose, dans cette question, de donner un encadrement du nombre  $H(3)$ .
- Montrer que pour tout réel  $x > 0$ ,  $\frac{x}{e^x - 1} = x \times \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}}$ .
  - En déduire que  $\int_1^3 f(x) dx = 3 \ln\left(1 - \frac{1}{e^3}\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{e}\right) - \int_1^3 \ln(1 - e^{-x}) dx$ .
  - Montrer que si  $1 \leq x \leq 3$ , alors  $\ln\left(1 - \frac{1}{e}\right) \leq \ln(1 - e^{-x}) \leq \ln\left(1 - \frac{1}{e^3}\right)$ .
  - En déduire un encadrement de  $\int_1^3 \ln(1 - e^{-x}) dx$  puis de  $\int_1^3 f(x) dx$ .

**expressbac.fr**

Pondichery 2008