

# BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION DE 2004

ÉPREUVE FACULTATIVE DE MATHÉMATIQUES

*Série L*

*Durée de l'épreuve : 3 heures*

*Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1 à 5*

*L'usage d'une calculatrice est autorisé*

*La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies*

*Ce sujet nécessite une feuille de papier millimétré.*

*Le candidat doit traiter TROIS exercices*  
*Obligatoirement : l'exercice 1 et l'exercice 2*  
*Au choix : l'exercice 3 ou l'exercice 4*

**Exercice 1 (7 points)**  
**Obligatoire**

**PARTIE I**

On considère la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $I = [0 ; 10]$  par  $f(x) = x^2 - 10x + 100$ .

1. Étudier les variations de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $I$  et montrer qu'elle admet un minimum que l'on précisera.
2. Tracer la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthogonal avec pour unités un centimètre sur l'axe des abscisses et deux millimètres sur l'axe des ordonnées.
3. Résoudre graphiquement l'équation  $f(x) = 81$ .

**PARTIE II**

On considère un triangle équilatéral  $ABC$  dont les côtés ont pour longueur 10 centimètres et un point  $M$  du segment  $[AB]$ .

Le point  $N$  est le point du segment  $[AC]$  tel que  $AN = AM$ .

Le point  $H$  est le pied de la hauteur issue de  $N$  dans le triangle  $ANB$ .

1. Faire une figure.
2. L'objectif de cette question est de déterminer par le calcul le point  $M$  du segment  $[AB]$  pour lequel la distance  $BN$  est minimale. Les distances sont exprimées en centimètres.  
On pose  $AM = x$ .
  - a) Déterminer l'intervalle des valeurs possibles pour  $x$ .
  - b) Déterminer en fonction de  $x$  la distance  $HB$ .
  - c) Montrer que  $HN = \frac{\sqrt{3}}{2} x$ .
  - d) Déterminer en fonction de  $x$  la valeur de  $BN^2$ .
  - e) En utilisant les résultats précédents, déterminer le point  $M$  du segment  $[AB]$  pour lequel  $BN^2$  est minimal.
3. L'objectif de cette question est de retrouver géométriquement le résultat de la question précédente.
  - a) Montrer que la distance  $BN$  est minimale lorsque l'angle  $\widehat{BNA}$  est droit.
  - b) Vérifier que l'on retrouve bien la réponse à la question 2.

## Exercice 2 (6 points) Obligatoire

Au 1<sup>er</sup> janvier 2004, j'ai une somme  $u_0$  de 1000 € sur mon compte rémunéré en intérêts composés à 2 % par an. On note  $u_0 = 1\,000$ .

Les intérêts sont versés chaque année le 31 décembre.

Je décide qu'à partir de 2005 je retirerai chaque année 100 € le 1<sup>er</sup> janvier.

J'appelle  $u_n$  le solde au 1<sup>er</sup> janvier de l'année  $(2004 + n)$  après mon retrait de 100 €.

1. a) Calculer les soldes  $u_1$  et  $u_2$  de ce compte.  
b) La suite de terme général  $u_n$  est-elle arithmétique ? Est-elle géométrique ?  
c) Montrer que pour tout  $n$  entier naturel,  $u_{n+1} = 1,02 u_n - 100$ .
  
2. a) On pose, pour tout  $n$  entier naturel,  $v_n = u_n - 5\,000$ . Calculer  $v_0$ .  
b) Montrer que pour tout  $n$ ,  $v_{n+1} = 1,02 v_n$ .  
c) Exprimer le terme général  $v_n$  de la suite  $(v_n)$  en fonction de  $n$ .
  
3. a) En déduire l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ .  
b) Calculer  $u_{10}$  en arrondissant à 0,01 près.  
c) À partir du 1<sup>er</sup> janvier de quelle année mon compte aura-t-il un solde négatif pour la première fois ?

**Exercice 3 : 7 points**  
**(Au choix)**

*Le but de l'exercice est de prouver pour les nombres à quatre chiffres, le critère de divisibilité :  
« Un nombre est divisible par 3 si et seulement si la somme  
de ses chiffres est elle-même divisible par 3 »*

1. Un exemple

- a) Pour un entier naturel  $n$ , que signifie la phrase «  $n$  est congru à 1 modulo 3 » ?  
Traduire à l'aide d'une congruence «  $n$  est divisible par 3 ».
- b) Pour chacun des nombres suivants, donner l'entier positif le plus petit auquel il est congru modulo 3 : 10, 100, 1000,  $10^p$  où  $p$  est un entier positif.
- c) Déterminer le plus petit entier positif auquel est congru le nombre 4 520 modulo 3.  
On remarquera que  $4520 = 4 \times 1000 + 5 \times 100 + 2 \times 10$ .
- d) En utilisant la question b) trouver le reste de la division de 5112 par 3.

2. Quelques généralisations

On considère un entier  $N$  à quatre chiffres, quatre entiers  $a, b, c$ , et  $d$  entre 0 et 9 tels que  
 $a \neq 0$  et  $N = 1000a + 100b + 10c + d$ .  
Le chiffre des unités est  $d$ , celui des dizaines  $c$ , des centaines  $b$  et des milliers  $a$ .

- a) Montrer que  $N \equiv a + b + c + d$  modulo 3.
- b) Justifier, pour les nombres à quatre chiffres, le critère de divisibilité par 3 énoncé au début de l'exercice.
- c) Énoncer un critère analogue de divisibilité par 9, et le démontrer pour les nombres à quatre chiffres.

## Exercice 4 : 7 points

(Au choix)

À l'université de sciences économiques, les étudiants de licence sont répartis en deux filières A et B. Un tiers des étudiants de licence est dans la filière A.

Parmi les étudiants de la filière A, 60 % sont inscrits dans l'option droit.

Parmi les étudiants de la filière B, 90 % sont inscrits dans l'option droit.

1. On interroge un étudiant de licence au hasard.

On note A l'événement « l'étudiant est dans la filière A ».

On note D l'événement « l'étudiant est inscrit à l'option droit ».

- Traduire la situation ci-dessus par un arbre.
- Montrer que la probabilité pour que l'étudiant soit inscrit dans l'option droit est  $p(D) = 0,8$ .
- Déterminer la probabilité  $p_{\bar{D}}(A)$ , probabilité pour que l'étudiant appartienne à la filière A sachant qu'il n'est pas inscrit dans l'option droit.

2. On interroge au hasard successivement trois étudiants de licence.

On s'intéresse au nombre d'étudiants inscrits dans l'option droit, parmi les trois étudiants interrogés

- Calculer la probabilité pour que les trois étudiants soient inscrits dans l'option droit.
- Calculer la probabilité pour que deux étudiants exactement soient inscrits dans l'option droit.
- Calculer la probabilité pour qu'aucun des trois étudiants ne soit inscrit dans l'option droit.
- Calculer la probabilité pour qu'au moins un des trois étudiants ne soit pas inscrit dans l'option droit.

# CORRIGE

**Ces éléments de correction n'ont qu'une valeur indicative. Ils ne peuvent en aucun cas engager la responsabilité des autorités académiques, chaque jury est souverain.**

# BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION DE 2004

ÉPREUVE FACULTATIVE DE MATHÉMATIQUES

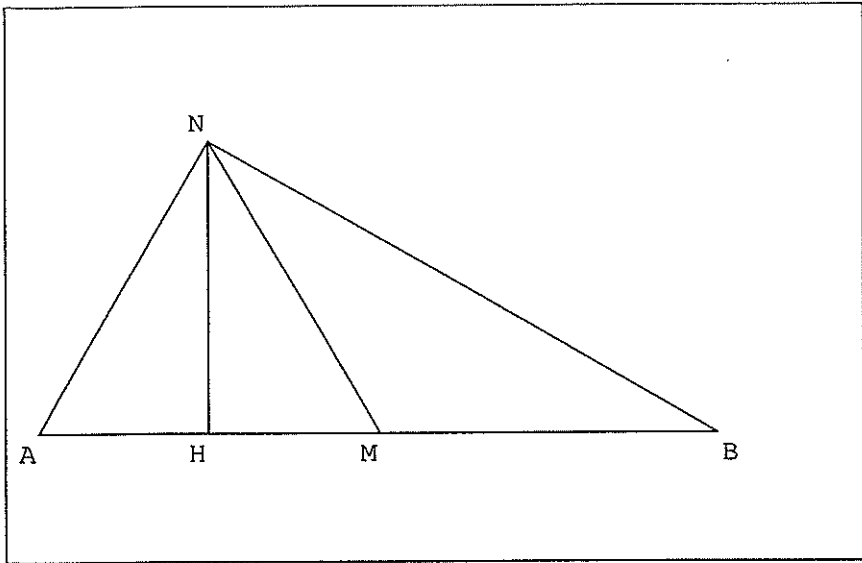
Série L

Durée de l'épreuve : 3 heures

## CONSIGNES DE CORRECTION

### Exercice 1 (7 points)

Questions	Réponses	Proposition de répartition des points												
I.1)	<table border="1"><tr><td><math>x</math></td><td>0</td><td>5</td><td>10</td></tr><tr><td><math>f'(x)</math></td><td>-</td><td>0</td><td>+</td></tr><tr><td><math>f(x)</math></td><td>100</td><td></td><td>100</td></tr></table> <p style="text-align: center;">75</p> <p>minimum 75 Deux méthodes acceptées : calcul de la dérivée ou détermination du sommet</p>	$x$	0	5	10	$f'(x)$	-	0	+	$f(x)$	100		100	1
$x$	0	5	10											
$f'(x)$	-	0	+											
$f(x)$	100		100											
I.2)	Courbe	0,5												
I.3)	Environ 2,5 et 7,5	0,5 = 2 × 0,25												

II.1)	Figure exacte	0,5
II.2) a)	$[0 ; 10]$	0,25
II.2) b)	$HB = 10 - \frac{x}{2}$	0,5
II.2) c)	$AN = x \quad AH = \frac{x}{2}$ $AN^2 = AH^2 + HN^2$ $HN = \frac{\sqrt{3}}{2}x$	1,25
II.2) d)	$BN^2 = BH^2 + HN^2$ et $BN^2 = \left(10 - \frac{x}{2}\right)^2 + \frac{3x^2}{4}$ $= x^2 - 10x + 100 = f(x)$	0,5
II.2) e)	D'après la partie I, la fonction $f$ admet sur $[0, 10]$ un minimum pour $x = 5$ $BN^2$ est minimal pour $x = 5$ , c'est-à-dire lorsque $M$ est au milieu du segment $[AB]$	0,5 + 0,5
II.3) a)	<div style="text-align: center;">  </div> <p>La distance du point B au point N est minimum lorsque N est le projeté orthogonal de B sur (AC)  Dans ce cas le triangle ANB est rectangle en N.</p>	0,5
II.3) b)	$\widehat{NAB} = 60^\circ$ donc $AN = AB \times \cos 60^\circ = 10 \times \frac{1}{2}$ $AN = 5$ cm $ANM$ est équilatéral et $AM = AN = 5$ cm	0,5

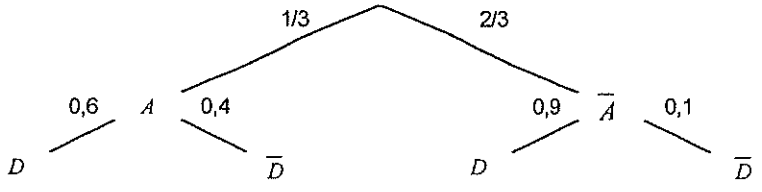
**Exercice 2 (6 points)**

Questions	Réponses	Proposition de répartition des points
1) a)	$u_1 = 920 ; u_2 = 838,40$	0,5
1) b)	Les différences $u_1 - u_0 = -80$ et $u_2 - u_1 = -81,60$ ne sont pas égales, $u$ n'est donc pas une suite arithmétique.  Les quotients $\frac{u_1}{u_0} = \frac{920}{1000} \approx 0,92$ et $\frac{u_2}{u_1} = \frac{838,4}{920} \approx 0,911$ ne sont pas égaux, $u$ n'est donc pas une suite géométrique.	1
1) c)	$u_{n+1} = u_n + 0,02u_n - 100 = 1,02u_n - 100$	0,5
2) a)	$v_0 = u_0 - 5000 = -4000$	0,5
2) b)	Pour tout $n$ entier naturel, $v_{n+1} = u_{n+1} - 5000$ $v_{n+1} = 1,02u_n - 100 - 5000 ; v_{n+1} = 1,02u_n - 5100$ $v_{n+1} = 1,02(v_n - 5000) - 5100 ; v_{n+1} = 1,02v_n$	1
2) c)	$v$ est une suite géométrique de premier terme $v_0 = -4000$ et de raison $1,02$ . $v_n = -4000 \times 1,02^n$	0,5
3) a)	$u_n = 5000 + v_n = 5000 - 4000 \times 1,02^n$	0,5
3) b)	$u_{10} = 5000 - 4000 \times 1,02^{10} \approx 124,02$	0,5
3) c)	$u_n < 0 ; 5000 - 4000 \times 1,02^n < 0 ; 4000 \times 1,02^n > 5000$ $1,02^n > 1,25 ; n \times \ln(1,02) > \ln(1,25) ; n > \frac{\ln(1,25)}{\ln(1,02)} ; n > 11,278$ En 2016, $u_{12} \approx -72,97$ , mon compte aura un solde négatif. On acceptera le calcul des termes même si la croissance n'est pas étudiée. On acceptera un calcul à la machine en essayant les termes successifs.	1

**Exercice 3 (7 points)**

Questions	Réponses	Proposition de répartition des points
1) a)	La division euclidienne de $n$ par 3 est 1 ou $(n-1)$ est multiple de 3 Si $n$ est divisible par 3 alors $n \equiv 0 \pmod{3}$	0,5 0,5
1) b)	$10 \equiv 1 ; 100 \equiv 1 ; 1000 \equiv 1 ; 10^p \equiv 1 \pmod{3}$	1
1) c)	$4520 \equiv 4 \times 1 + 5 \times 1 + 2 \times 1 \pmod{3}$ $4520 \equiv 2 \pmod{3}$ pour 1) b et 1) c une référence aux opérations sur les congruences est souhaitée.	0,5
1) d)	$5112 \equiv 5 \times 1000 + 1 \times 100 + 1 \times 10 + 2 \pmod{3}$ $5112 \equiv 5 + 1 + 1 + 2 \pmod{3} ; 5112 \equiv 0 \pmod{3}$ 5112 est divisible par 3	1
2) a)	$N \equiv 1 \times a + 1 \times b + 1 \times c + d \pmod{3}$ en utilisant les congruences de 1000, 100, 10 modulo 3.	0,5
2) b)	$a + b + c + d$ est divisible par 3 est équivalent à $a + b + c + d \equiv 0 \pmod{3}$ et donc à « N divisible par 3 ».	1
2) c)	Écriture $1000a + 100b + 10c + d$ et congruences des puissances de 10 modulo 9 puis énoncé	1 1

**Exercice 4 (7 points)**

Questions	Réponses	Proposition de répartition des points
1) a)	<p>Arbre pondéré</p> 	1
1) b)	$p(D) = p(A) \times p_A(D) + p(\bar{A}) \times p_{\bar{A}}(D) = 0,8$ <p>ou lecture de l'arbre.</p>	1
1) c)	$p_{\bar{D}}(A) = \frac{p(A \cap \bar{D})}{p(\bar{D})} = \frac{\frac{1}{3} \times 0,4}{0,2} = \frac{2}{3}$	1
2) a)	<p>Pour la question 2) on peut utiliser un arbre ou faire référence à la loi binomiale</p> $p_3 = 0,8^3 = 0,512$	1
2) b)	$p_2 = 3 \times 0,8^2 \times 0,2 = 0,384$	1
2) c)	$p_0 = 0,2^3 = 0,008.$	1
2) d)	$1 - p_3 = 0,488.$	1