

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2006

ÉPREUVE DE SPÉCIALITÉ DE MATHÉMATIQUES

Série L

Durée de l'épreuve : 3 heures

Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1 à 5.

L'usage d'une calculatrice est autorisé.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

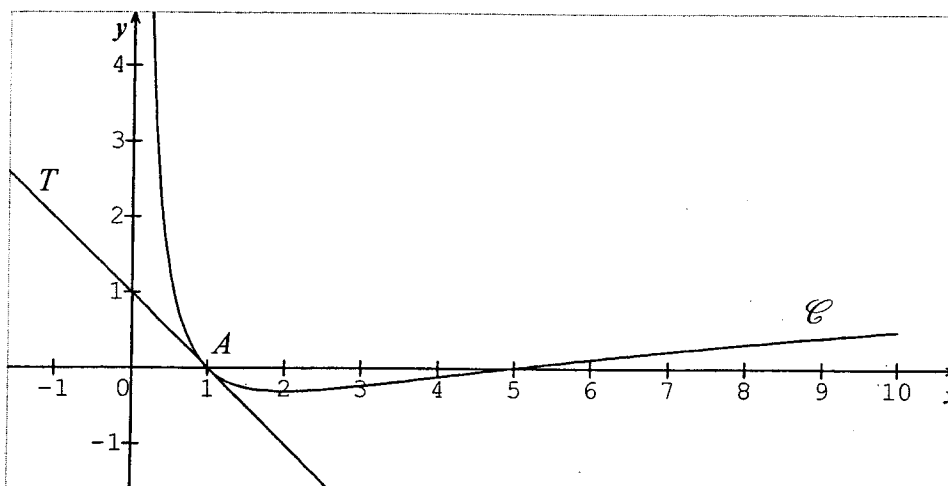
Ce sujet comporte en page 5/5 une feuille annexe à rendre avec la copie.

Exercice 1 (8 points)

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

Partie A

La courbe \mathcal{C} ci-dessous est la représentation graphique dans un repère orthonormal d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0; 10]$. On note f' la fonction dérivée de f sur cette intervalle.



On précise que la droite T est tangente à la courbe \mathcal{C} au point A de coordonnées $(1; 0)$ et qu'elle passe par le point de coordonnées $(0; 1)$.

- Répondre aux deux questions suivantes par lecture graphique :
 - Donner $f(1)$ et $f'(1)$ en justifiant la valeur de $f'(1)$.
 - Lire les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sur l'intervalle $]0; 10]$.
- On sait que $f(x)$ est de la forme $f(x) = \ln x + \frac{a}{x} + b$, où a et b désignent deux nombres réels.
 - Calculer $f'(x)$.
 - En utilisant les valeurs trouvées pour $f(1)$ et $f'(1)$ à la question 1., calculer a et b .
 - En déduire l'expression de $f(x)$.

Partie B

On sait désormais que la fonction f est définie sur l'intervalle $]0; 10]$ par $f(x) = \ln x + \frac{2}{x} - 2$.

- Vérifier que pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0; 10]$

$$f'(x) = \frac{x-2}{x^2}.$$

Étudier le signe de $f'(x)$.

- b) On admet que la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0 est $+\infty$.
 Dresser le tableau de variation de la fonction f .
 En déduire le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ sur l'intervalle $]0; 10]$.
2. Le nombre 5 est-il vraiment une solution de l'équation $f(x) = 0$?

Exercice 2 (6 points)

On admet qu'on obtient le même reste en divisant un nombre par 9 qu'en divisant la somme de ses chiffres par 9.

Par exemple : $8753 = 972 \times 9 + 5$, le reste est donc 5.
 $8 + 7 + 5 + 3 = 23 = 2 \times 9 + 5$, le reste est également 5.

Sur les billets de banque en euros figure un code de 11 chiffres précédé d'une lettre. On remplace la lettre par son rang dans l'alphabet habituel comportant 26 lettres. On obtient ainsi un nombre à 12 ou 13 chiffres et on cherche le reste de la division de ce nombre par 9. Ce reste est le même pour tous les billets authentiques et vaut 8.

Exemple :



Code : s00212913862.

Rang dans l'alphabet de la lettre s : 19.

Nombre obtenu : 1900212913862.

Reste pour ce billet : 8.

1. Le code u01308937097 figure sur un billet de banque.
 - a. Donner le nombre à 13 chiffres correspondant à ce code.
 - b. Calculer le reste de la division par 9 de la somme des 13 chiffres de ce nombre.
 - c. Que peut-on dire de ce billet ?
2. Sur un billet authentique figure le code s0216644810x, x pour le dernier chiffre illisible. Montrer que $x + 42$ est congru à 8 modulo 9.
 En déduire x.
3. Sur un autre billet authentique la partie du code formé par les 11 chiffres est 16122340242, mais la lettre qui les précède est effacée. On appelle n le rang dans l'alphabet de la lettre effacée.
 - a. Déterminer les valeurs possibles de n.
 - b. Quelles sont les possibilités pour la lettre effacée ?

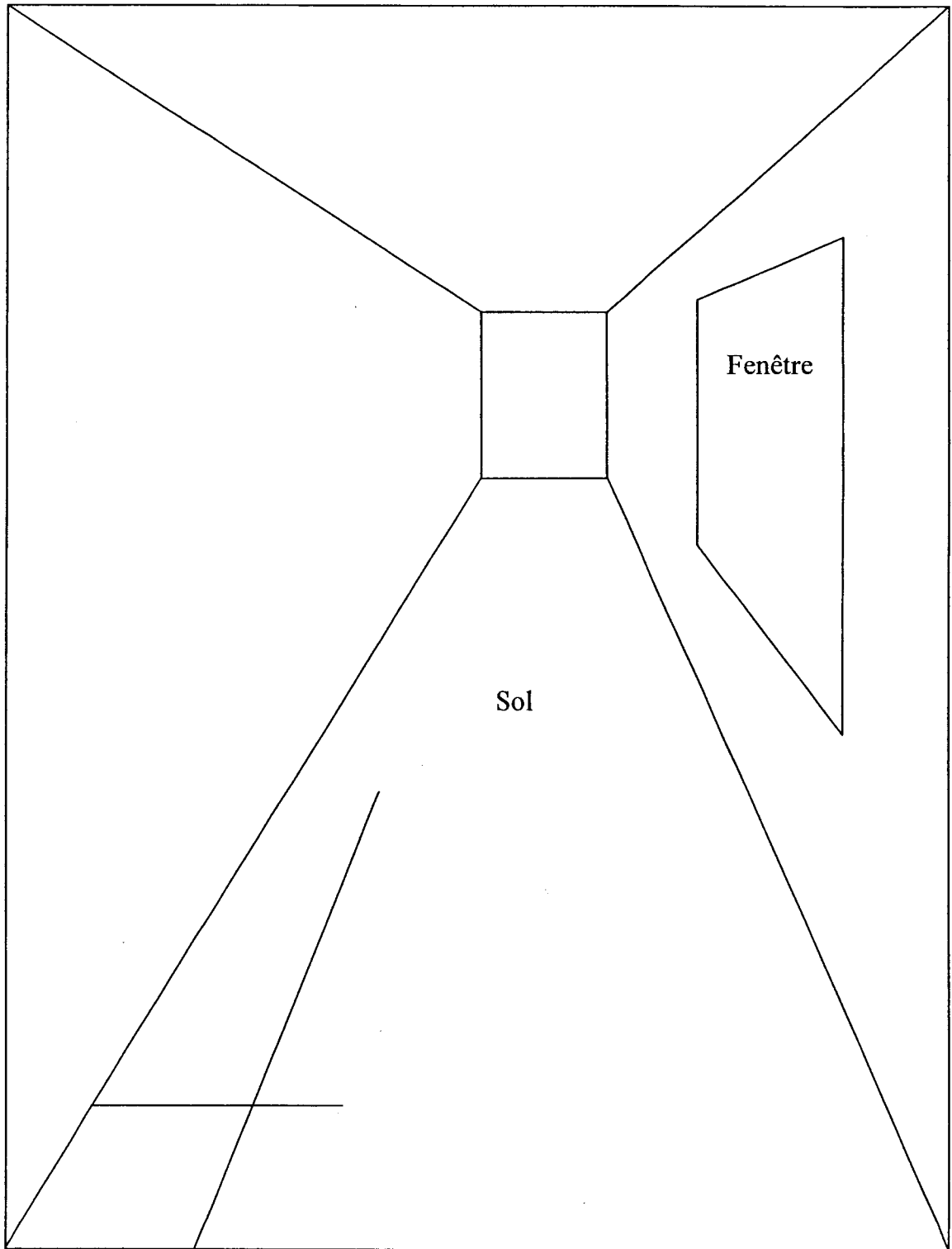
Exercice 3 (6 points)

Un architecte a commencé le dessin d'un couloir (**voir la figure en feuille annexe page 5/5**). Il a dessiné une large fenêtre rectangulaire sur le mur vertical de droite. Il n'a dessiné qu'une partie du carrelage du sol.

On admet que l'architecte respecte les règles de la perspective à point de fuite. Toutes les constructions sont à faire sur **la figure donnée en annexe à rendre avec la copie**.

1. Citer une règle de la perspective à point de fuite. La vérifier sur la figure fournie en feuille annexe (*on peut éventuellement effectuer des constructions sur la figure*).
2. Sachant que le carrelage est régulier, représenter les 3 premières rangées de 5 carreaux (*laisser clairement apparaître les traits de construction ; aucune justification écrite n'est demandée par ailleurs*).
3. La fenêtre rectangulaire du mur de droite comporte deux battants de même largeur séparés par une traverse verticale. Au milieu de cette traverse verticale est fixée une poignée. Seul le cadre de la fenêtre est représenté sur le dessin. Compléter la figure en représentant la traverse verticale par un segment et la poignée par un point M .

Feuille annexe de l'exercice 3 à rendre avec la copie



CORRIGE

Ces éléments de correction n'ont qu'une valeur indicative. Ils ne peuvent en aucun cas engager la responsabilité des autorités académiques, chaque jury est souverain.

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION DE 2006

ÉPREUVE DE SPÉCIALITÉ DE MATHÉMATIQUES

Série L

Durée de l'épreuve : 3 heures

CONSIGNES DE CORRECTION

EXERCICE 1 (8 points)		Suggéré	Définitif												
A.1.a)	$f(1) = 0$; $f'(1) = -1$ car le coefficient directeur de la tangente T , définie par deux points, est -1 .	1													
A.1.b)	Les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont : 1 (valeur exacte) et 5 (valeur approchée)	1													
A.2.a)	$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{a}{x^2}$	0,5													
A.2.b)	$f'(1) = -1 \Leftrightarrow \frac{1}{1} - \frac{a}{1^2} = -1 \Leftrightarrow a = 2$ $f(1) = 0 \Leftrightarrow \ln 1 + \frac{a}{1} + b = 0 \Leftrightarrow b = -a$ Le nombre réel a vaut donc 2 et le nombre réel b vaut -2 .	1,5													
A.2.c)	$f(x) = \ln x + \frac{2}{x} - 2$	0,5													
B.1.a)	$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} = \frac{x-2}{x^2}$; $f'(x)$ est du signe de $x-2$. Sur $]0; 2]$, $f'(x)$ est négatif et sur $[2; 10]$, $f'(x)$ est positif.	1,5													
B.1.b)	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tr> <td>x</td> <td>0</td> <td>2</td> <td>10</td> </tr> <tr> <td>f</td> <td></td> <td>+</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>f</td> <td>$+\infty$</td> <td></td> <td></td> </tr> </table> <div style="display: inline-block; vertical-align: middle; margin-left: 10px;"> $f(2) \approx -0,3 < 0$ $f(10) \approx 0,5 > 0$ 2 solutions pour $f(x) = 0$ </div>	x	0	2	10	f		+	0	f	$+\infty$			1	
x	0	2	10												
f		+	0												
f	$+\infty$														
B.2.	5 n'est pas solution de $f(x) = 0$ car $f(5) = \ln 5 + \frac{2}{5} - 2 \approx 0,009$ différent de zéro.	1													

EXERCICE 2 (6 points)		Suggéré	Définitif
1. a.	2101308937097	1	
1. b.	Somme des chiffres : 50. Le reste de la division par 9 est 5.	1	
1. c.	Le billet n'est pas authentique.	0,5	
2.	Somme des chiffres : $1 + 9 + 0 + \dots + 0 + x = 42 + x$. D'où $42 + x \equiv 8 \pmod{9}$. Ce qui donne $x = 2$ on a bien $44 \equiv 8 \pmod{9}$.	1,5	
3. a.	Somme des chiffres : $n + 1 + 6 + \dots + 4 + 2 = n + 27$. D'où : $n + 27 \equiv 8 \pmod{9}$. On sait que n est compris entre 1 et 26 et congru à -19 ou à 8 modulo 9. n peut donc prendre les valeurs suivantes : 8, 17 ou 26.	1	
3. b.	Les possibilités pour la lettre effacée sont donc : h, q ou z .	1	

EXERCICE 3 (6 points)		Suggéré	Définitif
1)	Deux droites \mathcal{D} et \mathcal{D}' parallèles et horizontales, non parallèles au « plan du tableau », ont le même point de fuite F situé sur la ligne d'horizon. Sur le dessin, deux bords du plafond, deux bords du sol ainsi que les bords horizontaux de la fenêtre se trouvent sur six droites sécantes en F .	2	
2)	Partage en cinq, tracé de la diagonale du premier carreau, dessin des 15 carreaux.	2,5	
3)	Dessin de M et de la traverse verticale de la fenêtre.	1,5	

