

Durée : 4 heures

∞ Corrigé du baccalauréat S Polynésie ∞  
septembre 2006

EXERCICE 1

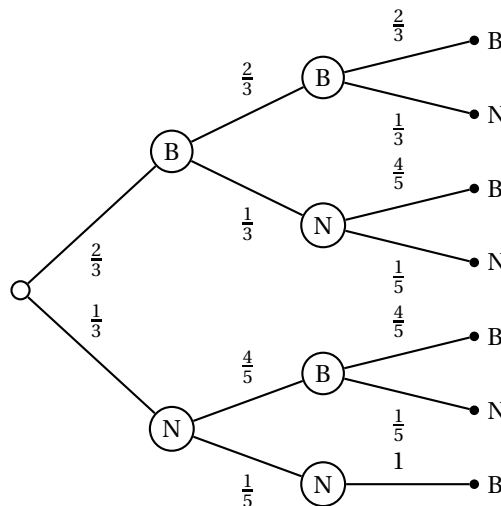
4 points

1.
  - a. On a  $c - a = 2 + 2i$  et  $b - a = 2 - 2i$ ; or  $c - a = 2 + 2i = i(2 - 2i) = i(b - a)$ . Cette égalité signifie que C est l'image de B dans le quart de tour direct de centre A. Donc le triangle ABC est rectangle en A.
  - b. On a  $\frac{z-3}{z-5+2i} = \frac{z-z_A}{z-z_B}$ . Donc  $\arg\left(\frac{z-3}{z-5+2i}\right) = (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM})$
  - c. Le nombre  $\frac{z-3}{z-5+2i}$  est un réel strictement négatif si et seulement si l'un des ses arguments est égal à  $\pi$ . D'après le b, on a donc  $\frac{z-3}{z-5+2i} \in \mathbb{R}^- \iff (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}) = \pi \pmod{2\pi} \iff M \in ]AB[$ . L'ensemble cherché est donc le segment ouvert  $]AB[$ .
2.
  - a. Si  $z'$  est l'affixe du point image du point d'affixe  $z$  dans la rotation  $r$  de centre  $\Omega$  et d'angle  $-\frac{\pi}{2}$ , cette affixe vérifie  $z' - \omega = -i(z - \omega) \iff z' = -iz + \omega(1+i) \iff z' = -iz + (2-i)(1+i) \iff z' = -iz + 3 + i$ .
  - b. ABC étant rectangle isocèle en A, le centre E du cercle circonscrit  $\Gamma$  est le milieu de  $[BC]$  d'affixe 5 et son rayon est égal à 2. Une rotation est une isométrie donc l'image du cercle  $\Gamma$  est le cercle  $\Gamma'$  dont le centre est  $E'$ , image de E par  $r$  et de même rayon 2. On a alors :  $z_{E'} = z'_E = -iz_E + 3 + i = -5i + 3 + i = 3 - 4i$ . Une équation paramétrique de  $\Gamma'$  est alors :  $z - z_{E'} = 2e^{i\theta}$ ,  $\theta \in [0; 2\pi[$  donc :  $z = 3 - 4i + 2e^{i\theta}$ ,  $\theta \in [0; \pi[$ .

EXERCICE 2

4 points

1.
  - a. On dresse l'arbre pondéré suivant :



Les valeurs prises par  $X$  sont (de haut en bas) : 0, 1, 1, 2, 1, 2, 2.

b. On a  $P(X = 0) = P(BBB) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$ .

c. – La probabilité demandée s’obtient en suivant la troisième branche.

Elle est égale à  $P(BNB) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{45}$ .

– On a de même  $P(NBB) = \frac{1}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{16}{75}$ .

$P(BBN) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{27}$ .

Finalement  $P(X = 1) = P(BBB) + P(BNB) + P(BBN) = \frac{8}{45} + \frac{16}{75} + \frac{4}{27} = \frac{120 + 144 + 100}{27 \times 25} = \frac{364}{675}$ .

2. –  $P(A) = \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \times \frac{1}{3} = \frac{2^{k-1}}{3^k}$ .

–  $P_A(B)$ . On sait donc que l’on a tiré une noire au  $k$ -ième tirage. Il reste donc 4 blanches et une noire. On tire  $(n - k)$  boules blanches avec une probabilité

de  $P_A(B) = \left(\frac{4}{5}\right)^{n-k}$ .

– Si seule la  $k$ -ième boule tirée est noire c’est que  $N = A \cap B$ .

On a donc  $p(N) = p(A \cap B) = P_A(B) \times P(A) = \left(\frac{4}{5}\right)^{n-k} \times \frac{2^{k-1}}{3^k} = \frac{2^{2n-k-1}}{3^k \times 5^{n-k}}$ .

**EXERCICE 3**

**7 points**

1. a. En écrivant  $f(x) = 2x^3e^{-x} - 4x^2e^{-x}$  qui ont tous deux pour limite moins l’infini, on obtient  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ .

De la même façon en plus l’infini, les deux termes ont pour limite 0, donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

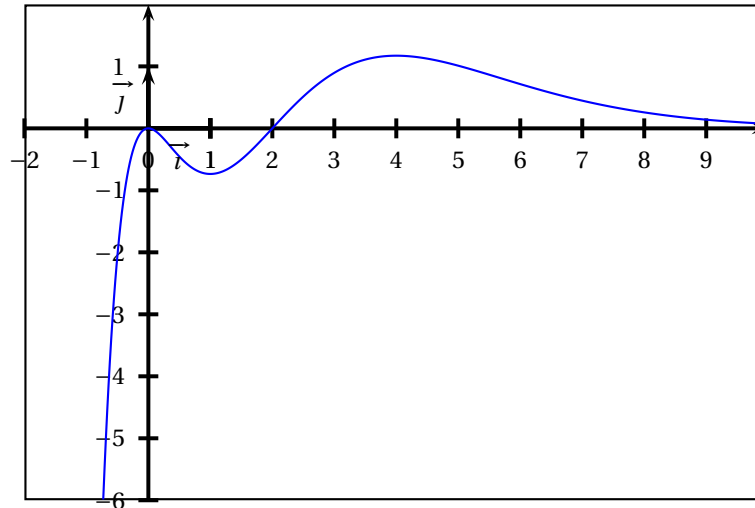
b. La dérivée de la fonction  $f$  est donnée par

$f'(x) = e^{-x}(6x^2 - 8x - 2x^3 + 4x^2) = e^{-x}(-2x^3 + 10x^2 - 8x) = 2xe^{-x}(-x^2 + 5x - 4)$ .

c. Comme quel que soit  $x \in \mathbb{R}$ ,  $e^{-x} > 0$ , le signe de la dérivée est celui de  $x(-x^2 + 5x - 4)$ . Le trinôme a pour racines 1 et 4, donc le signe de la dérivée dépend de la position de  $x$  par rapport aux nombres 0, 1 et 4. D’où le tableau de variations :

$x$	$-\infty$	0	1	4	$+\infty$		
$x$	-	0	+	+	+		
trinôme	+	+	0	-	0	+	
$f'$	+	0	-	0	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	0	$-\frac{2}{e}$	$\frac{64}{e^4}$	0		

d. Courbe représentative ( $\mathcal{C}$ ) :



2. a.  $I_1 = \int_0^1 xe^{-x} dx$ .
- Avec  $\begin{cases} u(x) = x & dv(x) = e^{-x} \\ du(x) = 1 & v(x) = -e^{-x} \end{cases}$  on obtient en intégrant par parties, toutes les fonctions étant dérivables,  $I_1 = [-xe^{-x}]_0^1 + \int_0^1 e^{-x} dx = [-xe^{-x} - e^{-x}]_0^1 = 1 - \frac{2}{e}$ .
- b. L'égalité  $I_n = nI_{n-1} - \frac{1}{e}$  donne pour  $n = 2$ ,  $I_2 = 2I_1 - \frac{2}{e} = 2 - \frac{5}{e}$ .  
 Pour  $n = 3$ ,  $I_3 = 3I_2 - \frac{1}{e} = 3\left(2 - \frac{5}{e}\right) - \frac{1}{e} = 6 - \frac{16}{e}$ .
- c. L'aire du domaine défini est égal (en unités d'aire) à la valeur absolue de l'intégrale  $\int_0^1 (2x^3 - 4x^2) e^{-x} dx = 2 \int_0^1 x^3 e^{-x} dx - 4 \int_0^1 x^2 e^{-x} dx = 2I_3 - 4I_2$  (par linéarité de l'intégrale).  
 On a donc  $\int_0^1 (2x^3 - 4x^2) e^{-x} dx = 2\left(6 - \frac{16}{e}\right) - 4\left(2 - \frac{5}{e}\right) = 4 - \frac{12}{e}$ .  
 Conclusion  $\mathcal{A} = \frac{12}{e} - 4 \approx 4,4$ .  
 Effectivement sur la figure, sur l'intervalle  $[0; 1]$ , la fonction est négative et l'aire vaut moins de  $\frac{1}{2}$  carreau ( $\text{cm}^2$ ).
3. a.  $u$  est croissante sur  $[a; b]$  signifie  $0 < a < x < b \Rightarrow u(a) < u(x) < u(b) \Leftrightarrow v\left(\frac{1}{a}\right) < v\left(\frac{1}{x}\right) < v\left(\frac{1}{b}\right)$ .  
 Or  $0 < a < x < b \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{x} < \frac{1}{a}$ .  
 On a donc  $\frac{1}{b} < \frac{1}{x} < \frac{1}{a} \Rightarrow v\left(\frac{1}{a}\right) < v\left(\frac{1}{x}\right) < v\left(\frac{1}{b}\right)$  ce qui démontre que la fonction  $v$  est décroissante sur  $\left[\frac{1}{b}; \frac{1}{a}\right]$ .
- b. On a donc  $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{2}{x^3} - \frac{4}{x^2}\right) e^{-\frac{1}{x}}$ .  
 En posant  $\frac{1}{x} = \alpha$ ,  $g(\alpha) = (2\alpha^3 - 4\alpha^2) e^{-\alpha}$ . On obtient alors facilement  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} g(\alpha) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$  et  $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} g(\alpha) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ .
- c. De même qu'au 2 a, on démontrerait que si  $u$  est décroissante, alors  $v$  est croissante. Le tableau de variations de  $g$  se déduit donc de celui de  $f$  après avoir remarqué que si  $1 < 4$ , alors  $\frac{1}{4} < 1$ . Les intervalles de varia-

tions sont donc  $\left[0; \frac{1}{4}\right]$ ,  $\left[\frac{1}{4}; 1\right]$  et  $[1; +\infty[$  : d'où le tableau :

$x$	0	$\frac{1}{4}$	1	$+\infty$
$g(x)$	0	$\frac{64}{e^4}$	$-\frac{2}{e}$	0

EXERCICE 4

5 points

1. Un vecteur  $\vec{n}_1$  normal à  $(P_1)$  est  $\vec{n}_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Un vecteur  $\vec{n}_2$  normal à  $(P_2)$  est

$\vec{n}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ . Ces deux vecteurs sont non nuls et  $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = -2 \times 1 + 1 \times (-2) + 1 \times 4 = 0$ . Ces vecteurs étant orthogonaux, les deux plans sont perpendiculaires.

2. En posant  $z = t$  les coordonnées de la droite commune aux deux plans vérifient  $\begin{cases} -2x + y = 6 - t \\ x - 2y = 9 - 4t \end{cases} \iff \begin{cases} -2x + y = 6 - t \\ 2x - 4y = 18 - 8t \end{cases} \Rightarrow -3y = 24 - 9t \iff y = -8 + 3t$  et en reportant dans l'une des équations des plans  $x = -7 + 2t$ .

Conclusion :  $M(x; y; z) \in (P_1 \cap P_2) = (D) \iff \begin{cases} x = -7 + 2t \\ y = -8 + 3t \\ z = t \end{cases}$ .

3. a. On a  $-18 - 4 - 1 - 6 = 0$  Faux et  $-9 + 8 - 4 - 9 = 0$  Faux

b.  $AM^2 = (x+9)^2 + (y+4)^2 + (z+1)^2 = (2+2t)^2 + (-4+3t)^2 + (t+1)^2 = 14t^2 - 14t + 21 = 7(2t^2 - 2t + 3)$ .

c.  $f(t) = 2t^2 - 2t + 3 = 2\left(t^2 - t + \frac{3}{2}\right) = 2\left[\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \frac{3}{2}\right] = 2\left[\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4}\right] \geq \frac{5}{4} > 0$ . Ce trinôme est donc décroissant sur  $]-\infty; \frac{1}{2}]$ , croissant sur  $[\frac{1}{2}; +\infty[$  et a un minimum en  $\frac{1}{2}$ .

Le point correspondant est  $M_{\text{mini}} = I\left(-6; -\frac{13}{2}; \frac{1}{2}\right)$ .

4. a. La représentation paramétrique de (D) donne les coordonnées d'un vecteur directeur de (D), donc un vecteur normal à (Q), c'est le vecteur  $\vec{q} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Une équation de (Q) est donc :  $2x + 3y + z + \alpha = 0$ .  $A \in (Q) \iff -18 - 12 - 1 + \alpha = 0 \iff \alpha = 31$ .

Une équation de (Q) est donc :  $M \in (Q) \iff 2x + 3y + z + 31 = 0$ .

b. Le triangle AMI est rectangle en I. Le côté [AI] a une longueur inférieure à celle de l'hypoténuse [AM] : I est bien le projeté orthogonal de A sur (D).