BACCALAUREAT GENERAL

Session 2003

MATHEMATIQUES

- Série S -

ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 7

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée

Le candidat doit traiter les DEUX exercices et le problème. La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le formulaire officiel de mathématiques, prévu par l'arrêté du 27 mars 1991 est joint au sujet.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 6 pages numérotées de 1 à 6

EXERCICE 1 (5 points)

Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples constitué de six questions : chacune comporte trois réponses, une et une seule étant exacte.

Les réponses à cet exercice sont à inscrire dans la feuille jointe en annexe, page 6, en cochant pour chaque question la case correspondante à la réponse proposée.

Toute réponse ambiguë sera considérée comme une absence de réponse. Toute réponse exacte entraîne une bonification, toute erreur est pénalisée.

On s'intéresse à la durée de vie, exprimée en années, d'un appareil ménager avant la première panne. On peut modéliser cette situation par une loi de probabilité p de durée de vie sans vieillissement, définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$. Ainsi, la probabilité d'un intervalle $[0, t[$, notée $p([0, t[)$, est la probabilité que l'appareil ménager tombe en panne avant l'instant t.

Cette loi est telle que $p([0, t[) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\, dx$, où t est un nombre réel positif représentant le nombre d'années (loi exponentielle de paramètre λ, avec $\lambda > 0$).

1) Pour $t \geqslant 0$, la valeur exacte de $p([t, +\infty[)$ est :

(a) $1 - e^{-\lambda t}$ (b) $e^{-\lambda t}$ (c) $1 + e^{-\lambda t}$

2) La valeur de t pour laquelle on a $p([0, t[) = p([t, +\infty[)$ est :

(a) $\dfrac{\ln 2}{\lambda}$ (b) $\dfrac{\lambda}{\ln 2}$ (c) $\dfrac{\lambda}{2}$

3) D'après une étude statistique, la probabilité que l'appareil tombe en panne avant la fin de la première année est 0,18. La valeur exacte de λ est alors :

(a) $\ln\left(\dfrac{50}{41}\right)$ (b) $\ln\left(\dfrac{41}{50}\right)$ (c) $\dfrac{\ln(82)}{\ln(100)}$

4) Sachant que cet appareil n'a connu aucune panne au cours des deux premières années après sa mise en service, la probabilité qu'il ne connaisse aucune panne l'année suivante est :

(a) $p([1, +\infty[)$ (b) $p([3, +\infty[)$ (c) $p([2,3[)$

Dans la suite de l'exercice on prendra $\lambda = 0{,}2$.

5) La probabilité que l'appareil n'ait pas eu de panne au cours des trois premières années, arrondie à 10^{-4} près, est :

(a) 0,5523 (b) 0,5488 (c) 0,4512

6) Dix appareils neufs de ce type ont été mis en service en même temps. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre d'appareils qui n'ont pas de panne au cours des trois premières années.
La valeur la plus proche de la probabilité de l'événement « $X = 4$ » est :

(a) 0,5555 (b) 0,8022 (c) 0,1607

EXERCICE 2 (5 points)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan est rapporté au repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique : 2 cm).

On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_{\mathrm{A}}=-1+\mathrm{i}\sqrt{3}$, $z_{\mathrm{B}}=-1-\mathrm{i}\sqrt{3}$ et $z_{\mathrm{C}}=2$.

1) Placer ces points sur un dessin.

2) **a)** Vérifier que : $\dfrac{z_{\mathrm{B}}-z_{\mathrm{C}}}{z_{\mathrm{A}}-z_{\mathrm{C}}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

b) En déduire la nature du triangle ABC.

c) Déterminer le centre et le rayon du cercle Γ_1 circonscrit au triangle ABC. Tracer le cercle Γ_1.

3) **a)** Établir que l'ensemble Γ_2 des points M d'affixe z qui vérifient $2(z+\bar{z})+z\bar{z}=0$ est un cercle de centre Ω d'affixe -2. Préciser son rayon. Construire Γ_2.

b) Vérifier que les points A et B sont éléments de Γ_2.

4) On appelle r_1 la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

a) Quelles sont les images des points A et B par la rotation r_1 ? Construire l'image C_1 du point C par la rotation r_1 puis calculer son affixe.

b) Déterminer l'image du cercle Γ_2 par la rotation r_1.

5) Soit r une rotation. Pour tout point M d'affixe z, on note M' l'image de M par r et z' l'affixe de M'.

On posera : $z'=az+b$, avec a et b des nombres complexes vérifiant $|a|=1$ et $a\neq 1$.

On suppose que r transforme le cercle Γ_2 en le cercle Γ_1.

a) Quelle est l'image du point Ω par r ? En déduire une relation entre a et b.

b) Déterminer en fonction de a l'affixe du point $r(\mathrm{C})$, image du point C par la rotation r ; en déduire que le point $r(\mathrm{C})$ appartient à un cercle fixe que l'on définira. Vérifier que ce cercle passe par C_1.

PROBLEME (10 points)

Commun à tous les candidats

Partie A : Étude d'une fonction f et construction de sa courbe

On considère la fonction f définie sur **R** par $f(x) = e^{-x} \ln(1+e^{x})$.
On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté au repère orthogonal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$. L'unité graphique est 1cm sur l'axe des abscisses et 10 cm sur l'axe des ordonnées.

1) a) On rappelle que : $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\ln(1+h)}{h} = 1$. Déterminer la limite de f en $-\infty$.

b) Vérifier que pour tout réel x : $f(x) = \dfrac{x}{e^{x}} + e^{-x}\ln(1+e^{-x})$.

Déterminer la limite de f en $+\infty$.

c) En déduire que la courbe $\mathscr{C}$ admet deux asymptotes que l'on précisera.

2) On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]-1\,;+\infty[$ par :

$$g(t) = \frac{t}{1+t} - \ln(1+t).$$

a) Démontrer que la fonction g est strictement décroissante sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

b) En déduire le signe de $g(t)$ lorsque $t > 0$.

3) a) Calculer $f'(x)$ et l'exprimer en fonction de $g(e^{x})$, f' désignant la fonction dérivée de f.

b) En déduire le sens de variation de la fonction f puis dresser son tableau de variation.

4) Tracer les asymptotes à la courbe $\mathscr{C}$ et la courbe $\mathscr{C}$.

Partie B : Comportements asymptotiques d'une primitive F de f sur R

Soit F la fonction définie sur **R** par $F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

1) Étudier le sens de variation de la fonction F.

2) **a)** Vérifier que, pour tout nombre réel t, $\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^t} = 1 - \dfrac{\mathrm{e}^t}{1+\mathrm{e}^t}$ et calculer $\displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+\mathrm{e}^t}$.

b) En déduire, à l'aide d'une intégration par parties, le calcul de $F(x)$.

c) Vérifier que $F(x)$ peut s'écrire sous les formes suivantes :

(1) $F(x) = x - \ln(1+\mathrm{e}^x) - f(x) + 2\ln 2$.

(2) $F(x) = \ln\left(\dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\right) - f(x) + 2\ln 2$.

3) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$.

4) Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} (F(x) - x)$. Donner une interprétation graphique de ce résultat.

Partie C : Étude d'une suite

Soit (u_n) la suite définie sur N^* par $u_n = f(1) + f(2) + \ldots + f(n) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{-k} \ln(1+\mathrm{e}^k)$.

1) Hachurer sur la représentation graphique un domaine dont l'aire, en unités d'aire, est u_4.

2) Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

3) **a)** Justifier que, pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$, on a : $f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t$.

b) Comparer u_n et $F(n)$.

4) La suite (u_n) est-elle convergente ?

Annexe à rendre avec la copie

Réponses à l'exercice 1 (mettre une croix dans la case correspondant à la réponse choisie)

	(a)	(b)	(c)
1)			
2)			
3)			
4)			
5)			
6)			