

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2003

MATHÉMATIQUES

Série S

DURÉE DE L'ÉPREUVE : 4 heures — COEFFICIENT : 7

*Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1 à 5,
et une page annexe à rendre avec la copie.*

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

*Le candidat doit traiter les DEUX exercices et le problème.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour
une part importante dans l'appréciation des copies.*

Le formulaire officiel de mathématiques est joint au sujet.

Tournez la page S.V.P.

Exercice 1 (4 points)

Commun à tous les candidats

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 2cm), on considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 2$, $b = 1 - i$ et $c = 1 + i$.

1. a. Placer les points A, B et C sur une figure.

b. Calculer $\frac{c-a}{b-a}$. En déduire que le triangle ABC est rectangle isocèle.

2. a. On appelle r la rotation de centre A telle que $r(B) = C$.

Déterminer l'angle de r et calculer l'affixe d du point $D = r(C)$.

b. Soit Γ le cercle de diamètre $[BC]$.

Déterminer et construire l'image Γ' du cercle Γ par la rotation r .

3. Soit M un point de Γ d'affixe z , distinct de C et M' d'affixe z' son image par r .

a. Montrer qu'il existe un réel θ appartenant à $\left[0; \frac{\pi}{2} \right[\cup \left] \frac{\pi}{2}; 2\pi \right[$ tel que $z = 1 + e^{i\theta}$.

b. Exprimer z' en fonction de θ .

c. Montrer que $\frac{z'-c}{z-c}$ est un réel. En déduire que les points C, M et M' sont alignés.

d. Placer sur la figure le point M d'affixe $1 + e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et construire son image M' par r .

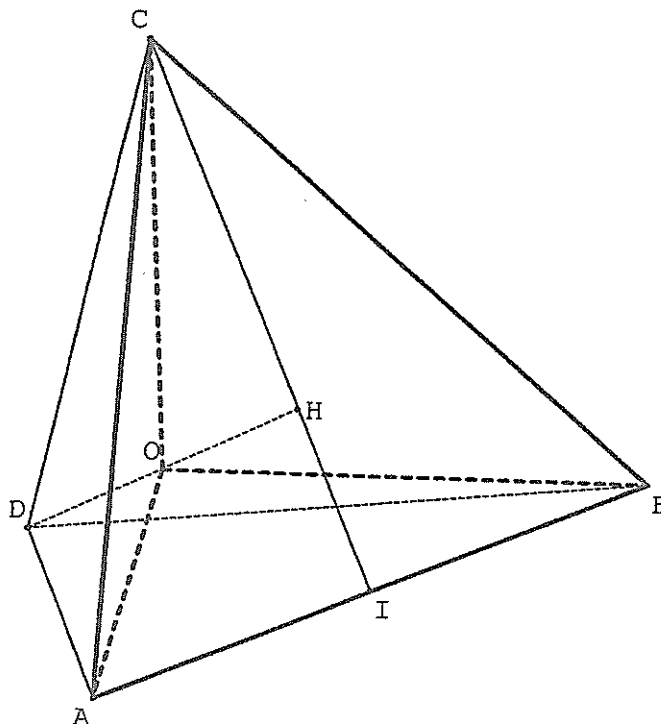
Exercice 2 (5 points)

(Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

Soient a un réel strictement positif.
et $OABC$ un tétraèdre tel que :

- OAB , OAC et OBC sont des triangles rectangles en O .
- $OA = OB = OC = a$.

On appelle I le pied de la hauteur issue de C du triangle ABC , H le pied de la hauteur issue de O du triangle OIC , et D le point de l'espace défini par $\overrightarrow{HO} = \overrightarrow{OD}$.



1. Quelle est la nature du triangle ABC ?
2. Démontrer que les droites (OH) et (AB) sont orthogonales, puis que H est l'orthocentre du triangle ABC .
3. Calcul de OH .
 - a. Calculer le volume V du tétraèdre $OABC$ puis l'aire S du triangle ABC .
 - b. Exprimer OH en fonction de V et de S , en déduire que $OH = a \frac{\sqrt{3}}{3}$.
4. Étude du tétraèdre $ABCD$.

L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(O ; \frac{1}{a}\overrightarrow{OA}, \frac{1}{a}\overrightarrow{OB}, \frac{1}{a}\overrightarrow{OC} \right)$.

 - a. Démontrer que le point H a pour coordonnées : $\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}, \frac{a}{3} \right)$.
 - b. Démontrer que le tétraèdre $ABCD$ est régulier (c'est-à-dire que toutes ses arêtes ont même longueur).
 - c. Soit Ω le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre $ABCD$.
Démontrer que Ω est un point de la droite (OH) puis calculer ses coordonnées.

Tournez la page S.V.P.

Problème (11 points)

Commun à tous les candidats

Soit N_0 le nombre de bactéries introduites dans un milieu de culture à l'instant $t = 0$ (N_0 étant un réel strictement positif, exprimé en millions d'individus).

Ce problème a pour objet l'étude de deux modèles d'évolution de cette population de bactéries :

- un premier modèle pour les instants qui suivent l'ensemencement (partie A)
- un second modèle pouvant s'appliquer sur une longue période (partie B).

Partie A

Dans les instants qui suivent l'ensemencement du milieu de culture, on considère que la vitesse d'accroissement des bactéries est proportionnelle au nombre de bactéries en présence.

Dans ce premier modèle, on note $f(t)$ le nombre de bactéries à l'instant t (exprimé en millions d'individus). La fonction f est donc solution de l'équation différentielle : $y' = ay$.

(où a est un réel strictement positif dépendant des conditions expérimentales).

1. Résoudre cette équation différentielle, sachant que $f(0) = N_0$.
2. On note T le temps de doublement de la population bactérienne.

Démontrer que, pour tout réel t positif : $f(t) = N_0 2^{\frac{t}{T}}$.

Partie B

Le milieu étant limité (en volume, en éléments nutritifs...), le nombre de bactéries ne peut pas croître indéfiniment de façon exponentielle. Le modèle précédent ne peut donc s'appliquer sur une longue période. Pour tenir compte de ces observations, on représente l'évolution de la population de bactéries de la façon suivante :

Soit $g(t)$ est le nombre de bactéries à l'instant t (exprimé en millions d'individus) ; la fonction g est une fonction strictement positive et dérivable sur $[0 ; +\infty[$ qui vérifie pour tout t de $[0 ; +\infty[$ la relation :

$$(E) \quad g'(t) = a g(t) \left(1 - \frac{g(t)}{M} \right),$$

où M est une constante strictement positive dépendant des conditions expérimentales et a le réel défini dans la partie A.

1. a. Démontrer que si g est une fonction strictement positive vérifiant la relation (E), alors la fonction $\frac{1}{g}$ est solution de l'équation différentielle (E') : $y' + ay = \frac{a}{M}$.

b. Résoudre (E').

c. Démontrer que si h est une solution strictement positive de (E'), alors $\frac{1}{h}$ vérifie (E).

2. On suppose désormais que, pour tout réel positif t , $g(t) = \frac{M}{1 + Ce^{-at}}$, où C est une constante strictement supérieure à 1 dépendant des conditions expérimentales.

a. Déterminer la limite de g en $+\infty$ et démontrer, pour tout réel t positif ou nul, la double inégalité : $0 < g(t) < M$.

b. Étudier le sens de variation de g (on pourra utiliser la relation (E)).

Démontrer qu'il existe un réel unique t_0 positif tel que $g(t_0) = \frac{M}{2}$.

c. Démontrer que $g'' = a(1 - \frac{2g}{M})g'$. Étudier le signe de g'' . En déduire que la vitesse d'accroissement du nombre de bactéries est décroissante à partir de l'instant t_0 défini ci-dessus. Exprimer t_0 en fonction de a et C .

d. Sachant que le nombre de bactéries à l'instant t est $g(t)$, calculer le nombre moyen de bactéries entre les instants 0 et t_0 , en fonction de M et C .

Partie C

1. Le tableau présenté en Annexe I a permis d'établir que la courbe représentative de f passait par les points de coordonnées respectives $(0 ; 1)$ et $(0,5 ; 2)$. En déduire les valeurs de N_0 , T et a .

2. Sachant que $g(0) = N_0$ et que $M = 100 N_0$, démontrer, pour tout réel t positif ou nul, l'égalité suivante :

$$g(t) = \frac{100}{1 + 99 \times 4^{-t}}.$$

3. Tracer, sur la feuille donnée en Annexe II, la courbe Γ représentative de g , l'asymptote à Γ ainsi que le point de Γ d'abscisse t_0 .

4. Dans quelles conditions le premier modèle vous semble-t-il adapté aux observations faites ?

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2003

MATHÉMATIQUES
OBLIGATOIRE

Série : S

PAGE ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE.

Tournez la page S.V.P.

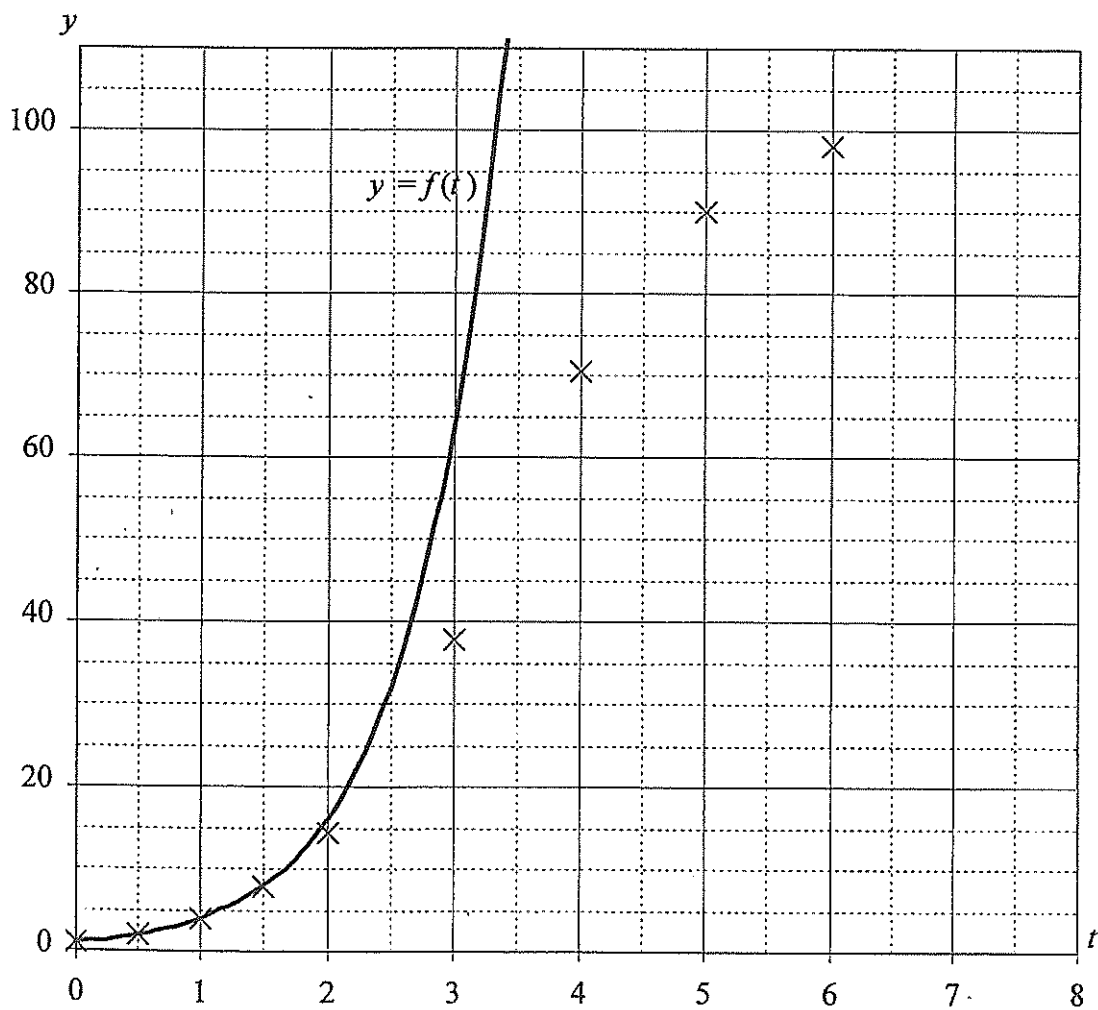
Document à rendre avec la copie

Annexe I

t (en h)	0	0,5	1	1,5	2	3	4	5	6
Nombre de bactéries (en millions)	1,0	2,0	3,9	7,9	14,5	37,9	70,4	90,1	98

Les points obtenus à partir de ce tableau, ainsi que la fonction f , sont représentés dans le repère ci-dessous.

Annexe II

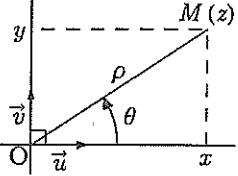


BACCALAURÉAT, SÉRIE S
ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE ET ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ
FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES

I. NOMBRES COMPLEXES, GÉOMÉTRIE

A. NOMBRES COMPLEXES

Dans le repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$ le point $M(x, y)$, où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, a pour affixe z .



z a pour forme algébrique $x + iy$.

Partie réelle de z : $\text{Re}(z) = x$

Partie imaginaire de z : $\text{Im}(z) = y$

Conjugué de z : $\bar{z} = x - iy$

Module de z : $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$

Si $z \neq 0$,

z a pour forme trigonométrique : $z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$

z a pour forme exponentielle : $z = \rho e^{i\theta}$

Module de z : $|z| = \rho$

Argument de z : $\arg z = \theta [2\pi]$

Conjugué de z : $\bar{z} = \rho e^{-i\theta}$

Propriétés des modules

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|\bar{z}| = |z|$

Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $\left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|}$

Pour tous $z \in \mathbb{C}$ et $z' \in \mathbb{C}$, $|zz'| = |z| |z'|$

Si A et B ont pour affixes respectives z_A et z_B alors \overline{AB} a pour affixe $z_B - z_A$ et $AB = |z_B - z_A|$.

Propriétés des arguments

Pour tous $z \in \mathbb{C}^*$ et $z' \in \mathbb{C}^*$,

$\arg(z z') = \arg(z) + \arg(z')$ $[2\pi]$

$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$ $[2\pi]$

Caractérisation complexe de transformations $M(z) \mapsto M'(z')$

Translation de vecteur \vec{u} d'affixe t , $t \in \mathbb{C}$: $z' = z + t$

Homothétie de centre Ω d'affixe ω , $\omega \in \mathbb{C}$, et de rapport

$k \in \mathbb{R}^*$: $z' - \omega = k(z - \omega)$

Rotation de centre Ω d'affixe ω , $\omega \in \mathbb{C}$, et d'angle de

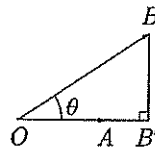
mesure $\theta \in \mathbb{R}$: $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$

B. GÉOMÉTRIE

Produit scalaire de deux vecteurs non nuls du plan

$$\overline{OA} \cdot \overline{OB} = \overline{OA} \times \overline{OB}$$

$$\overline{OA} \cdot \overline{OB} = OA \times OB \times \cos \theta$$



Produit scalaire et coordonnées

Si \vec{u} et \vec{v} admettent pour coordonnées respectives

(x, y, z) et (x', y', z') dans un repère orthonormal

de l'espace alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = x x' + y y' + z z'$ et $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$.

Une équation de la sphère de centre Ω de coordonnées

(a, b, c) et de rayon R est $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$.

II. ALGÈBRE, TRIGONOMÉTRIE

A. IDENTITÉS REMARQUABLES

Pour tous $a \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{C}$,

$$(a + b)^3 = a^3 + 3 a^2 b + 3 a b^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3 a^2 b + 3 a b^2 - b^3$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - a b + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + a b + b^2)$$

Pour tous $a \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{C}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(a + b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \dots + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \dots + b^n$$

B. ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ DANS \mathbb{C}

Soient a , b et c trois nombres réels ($a \neq 0$) et $\Delta = b^2 - 4ac$.

L'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet :

- lorsque $\Delta > 0$, deux solutions réelles

$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- lorsque $\Delta = 0$, une solution réelle $z_1 = -\frac{b}{2a}$

- lorsque $\Delta < 0$, deux solutions complexes conjuguées

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Si $\Delta \neq 0$, $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$

Si $\Delta = 0$, $az^2 + bz + c = a(z - z_1)^2$

C. TRIGONOMETRIE

Formules d'addition

Pour tous $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$,

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

Formules de duplication

Pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$$

$$\cos(2a) = 2 \cos^2 a - 1$$

$$\cos(2a) = 1 - 2 \sin^2 a$$

$$\sin(2a) = 2 \sin a \cos a$$

III. PROBABILITÉS

A. GÉNÉRALITÉS

Si les événements A et B sont incompatibles alors

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Dans le cas général : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) \quad P(\Omega) = 1 \quad P(\emptyset) = 0$$

Si A_1, \dots, A_n forment une partition de A , $P(A) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$.

Dans le cas de l'équiprobabilité,

$$P(A) = \frac{\text{Nombre d'éléments de } A}{\text{Nombre d'éléments de } \Omega}$$

Probabilité conditionnelle de B sachant A

$P_A(B)$ est définie par $P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A)$

Cas où A et B sont indépendants : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

Formule des probabilités totales

Si les événements B_1, B_2, \dots, B_n forment une partition de Ω

alors $P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \dots + P(A \cap B_n)$

B. VARIABLE ALÉATOIRE

Espérance mathématique : $E(X) = \sum_{i=1}^n p_i x_i$

Variance : $V(X) = \sum_{i=1}^n p_i (x_i - E(X))^2 = \sum_{i=1}^n p_i x_i^2 - (E(X))^2$

Ecart-type : $\sigma_X = \sqrt{V(X)}$

C. COMBINAISONS ET FORMULE DU BINÔME

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$, $0 \leq p \leq n$,

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n \quad 0! = 1.$$

$$\binom{n}{p} = \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p} \quad \binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$$

Le nombre de sous-ensembles à p éléments

d'un ensemble à n éléments est égal à $\binom{n}{p}$.

Pour tous $a \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{C}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \dots + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \dots + b^n$$

D. LOIS DE PROBABILITÉ

Loi de Bernoulli de paramètre p , $p \in [0; 1]$

X peut prendre les valeurs 0 et 1 avec les probabilités

$$P(X=1) = p \quad \text{et} \quad P(X=0) = 1-p$$

$$E(X) = p \quad V(X) = p(1-p)$$

Loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in [0; 1]$

X peut prendre les valeurs entières 0, 1, ..., n

Pour $0 \leq k \leq n$, $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

$$E(X) = np \quad V(X) = np(1-p)$$

Loi uniforme sur $[0; 1]$

J étant un intervalle inclus dans $[0; 1]$,

$P(J)$ = longueur de J

Loi exponentielle de paramètre λ sur $[0; +\infty[$,

dite aussi loi de durée de vie sans vieillissement

Pour $0 \leq a \leq b$, $P([a, b]) = \int_a^b \lambda e^{-\lambda t} dt$

Pour tout $c \geq 0$, $P([c, +\infty[) = 1 - \int_0^c \lambda e^{-\lambda t} dt$

IV. ANALYSE

A. SUITES ARITHMÉTIQUES, SUITES GÉOMÉTRIQUES

Suite arithmétique de premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$ et de raison $a \in \mathbb{R}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + a$

$$u_n = u_0 + n a$$

Suite géométrique de premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$ et de raison $b \in \mathbb{R}^*$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = b u_n$

$$u_n = u_0 b^n$$

Somme de termes

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Si $b \neq 1$ alors $1 + b + b^2 + \dots + b^n = \frac{1 - b^{n+1}}{1 - b}$.

Limite d'une suite géométrique

Si $0 < b < 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} b^n = 0$.

Si $b > 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} b^n = +\infty$.

B. PROPRIÉTÉS ALGÈBRIQUES DE FONCTIONS USUELLES

1. Fonctions exponentielles et logarithmes

$$e^0 = 1$$

Pour tous réels a et b ,

$$e^{a+b} = e^a e^b \quad e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b} \quad (e^a)^b = e^{ab}$$

Pour tout $x \in]0; +\infty[$, $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt$

$$\ln 1 = 0 \quad \ln e = 1$$

Pour tous $a > 0$ et $b > 0$,

$$\ln a b = \ln a + \ln b \quad \text{et} \quad \ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$$

Pour tout $a \in]0; +\infty[$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$a^x = e^{x \ln a} \quad \ln(a^x) = x \ln a$$

Pour tout $x \in]0; +\infty[$, $\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $y \in]0; +\infty[$,

$$y = e^x \quad \text{équivalent à} \quad x = \ln y.$$

2. Racine $n^{\text{ème}}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tous $x \in]0; +\infty[$ et $y \in]0; +\infty[$.

$$y = \sqrt[n]{x} \quad \text{équivalent à} \quad x = y^n.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in]0; +\infty[$, $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$

C. LIMITES USUELLES DE FONCTIONS

Comportement à l'infini

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

Comportement à l'origine

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$$

Croissances comparées à l'infini

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^{-x} = 0$$

Comportement à l'origine de $\ln(1+x)$, e^x , $\sin x$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

D. DÉRIVÉES ET PRIMITIVES

Les formules ci-dessous peuvent servir à la fois pour calculer des dérivées et des primitives sur des intervalles convenables. Les hypothèses permettant de les utiliser doivent être vérifiées par les candidats.

1. Dérivées et primitives des fonctions usuelles

$f(x)$	$f'(x)$
k	0
x	1
$x^n, n \in \mathbb{N}^*$	$n x^{n-1}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\frac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N}^*$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$
\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
e^x	e^x
a^x	$a^x \times \ln a$
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$

2. Opérations sur les dérivées

$$(u+v)' = u' + v' \quad (k u)' = k u' \quad k \text{ étant une constante}$$

$$(u v)' = u' v + u v' \quad \left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' v - u v'}{v^2} \quad (v \circ u)' = (v' \circ u) u'$$

$$(e^u)' = e^u u' \quad (\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(u^n)' = n u^{n-1} u' \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

E. CALCUL INTÉGRAL

Les hypothèses permettant d'utiliser les formules suivantes doivent être vérifiées par les candidats.

Formules fondamentales

$$\text{Si } F \text{ est une primitive de } f \text{ alors } \int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a).$$

$$\int_b^a f(t) dt = - \int_a^b f(t) dt$$

$$\text{Si } g(x) = \int_a^x f(t) dt \text{ alors } g'(x) = f(x).$$

Formule de Chasles

$$\int_a^c f(t) dt = \int_a^b f(t) dt + \int_b^c f(t) dt$$

Linéarité

$$\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t)) dt = \alpha \int_a^b f(t) dt + \beta \int_a^b g(t) dt$$

Positivité

$$\text{Si } a \leq b \text{ et } f \geq 0 \text{ alors } \int_a^b f(t) dt \geq 0.$$

Ordre

$$\text{Si } a \leq b \text{ et } f \leq g \text{ alors } \int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt.$$

Inégalité de la moyenne

$$\text{Si } a \leq b \text{ et } m \leq f \leq M \text{ alors } m(b-a) \leq \int_a^b f(t) dt \leq M(b-a)$$

Intégration par parties

$$\int_a^b u(t) v'(t) dt = [u(t) v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t) v(t) dt$$

$$\text{La valeur moyenne de } f \text{ sur } [a, b] \text{ (} a \neq b \text{) est } \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt.$$

F. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Pour tous $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$, les solutions de l'équation différentielle $y' = a y + b$ sont les fonctions définies sur \mathbb{R} par $f(x) = C e^{ax} - \frac{b}{a}$, $C \in \mathbb{R}$.

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

A. CONGRUENCES

Pour tous $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$,

si $a \equiv b [n]$ et $a' \equiv b' [n]$, alors

$$a + a' \equiv b + b' [n] \quad a - a' \equiv b - b' [n]$$

$$a a' \equiv b b' [n] \quad a^n \equiv b^n [n]$$

B. CARACTÉRISATION COMPLEXE DES SIMILITUDES

- Similitude directe : $z' = a z + b$ où $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$

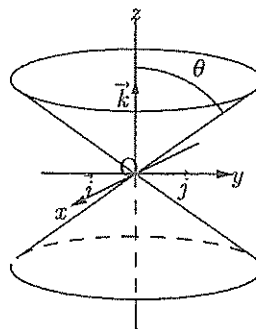
- Similitude indirecte : $z' = a \bar{z} + b$ où $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$

Dans les deux cas, le rapport de la similitude est égal à $|a|$

C. ENSEMBLES DE POINTS

Dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, une équation du cylindre d'axe $(O; \vec{k})$ et de rayon $r > 0$ est $x^2 + y^2 = r^2$.

Une équation d'un cône d'axe $(O; \vec{k})$ est $x^2 + y^2 = z^2 \tan^2 \theta$.



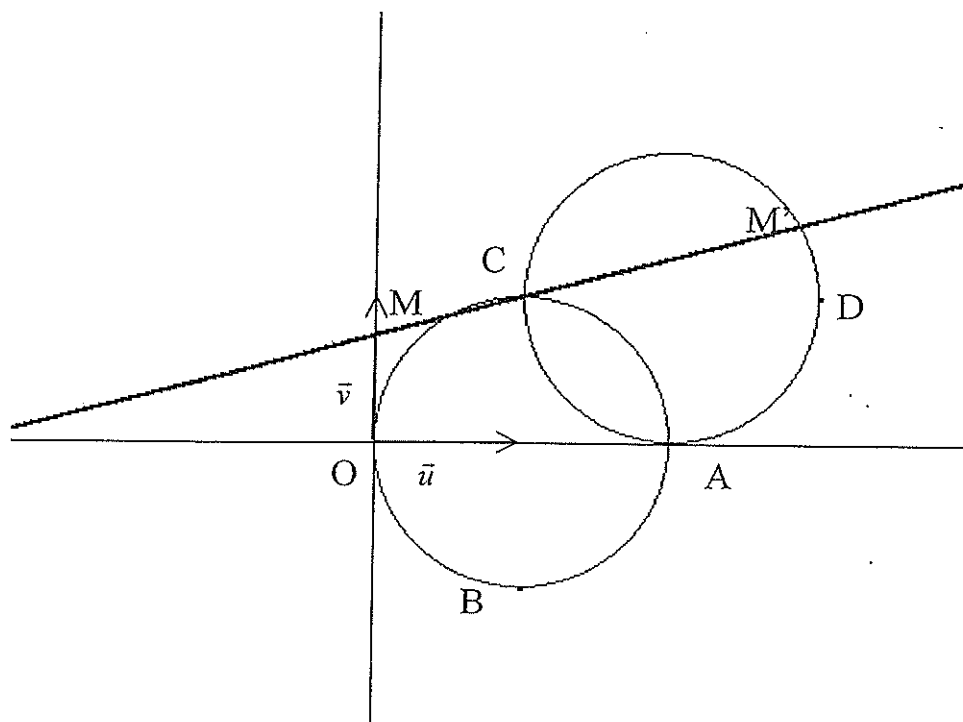
CORRIGE

Ces éléments de correction n'ont qu'une valeur indicative. Ils ne peuvent en aucun cas engager la responsabilité des autorités académiques, chaque jury est souverain.

**ÉLÉMENTS DE CORRECTION
 ET BARÈME INDICATIF PROPOSÉS**

N.B. : Il est rappelé que ce document est à l'usage exclusif des jurys. Les règles de confidentialité habituelles concernant les travaux des jurys, des commissions d'entente et des permanences téléphoniques s'appliquent à son contenu.

Exercice 1, commun à tous les candidats. Sur 4 points.



1 point, y compris la figure avec les points A, B, C et le cercle C.

1. a.
- b. $-1-i = -i(1-i)$

1 point

2. a. Une mesure de cet angle est $-\frac{\pi}{2}$. Si on note d l'affixe de D, on peut écrire :
 $d-2 = -i(-1+i)$
 Donc $d = 3+i$.
 C' est le cercle de diamètre $[CD]$.

2 points, y compris la figure explicitement demandée

3. a. Cette écriture fait apparaître l'affixe du milieu Ω de $[OA]$ et une mesure de l'angle $(\overline{\Omega A}, \overline{\Omega M})$.
- b. $z'-2 = -i(z-2)$ s'écrit : $z' = 2 - i(1 + e^{i\theta} - 2)$
 et finalement : $z' = 2 + i + e^{i(\theta - \frac{\pi}{2})}$, qui fait bien apparaître C' .

c. $\frac{z'-c}{z-c} = \frac{1+e^{i(\theta-\frac{\pi}{2})}}{-i+e^{i\theta}}$, qui se simplifie en : $\frac{z'-c}{z-c} = \frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}$

Exercice 2, pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité. Sur 5 points.

0,5 point
 1,5 points

1. Le triangle ABC est équilatéral.
2. La droite (AB) est perpendiculaire à (CI) par définition et à (OI) puisque le triangle AOB est rectangle isocèle. Elle est donc perpendiculaire au plan (OCI), donc orthogonale à (OH). Pour la suite, (OH) est perpendiculaire à (CI) et orthogonale à (AB), donc perpendiculaire au plan (ABC).

On peut poursuivre le raisonnement « en tournant » autour de (OH) ou montrer que, dans le triangle rectangle OCI, les segments déterminés par la hauteur sur l'hypoténuse sont dans un rapport 2, qui caractérise H comme centre de gravité, donc orthocentre, du triangle équilatéral ABC.

1,5 points

3. a. $V = \frac{1}{3} \times a \times \frac{a^2}{2}$, qu'on écrit : $V = \frac{a^3}{6}$.

Le côté du triangle équilatéral ABC est $a\sqrt{2}$. Son aire est $S = \frac{1}{2} \times a\sqrt{2} \times \frac{a\sqrt{2}\sqrt{3}}{2}$, qu'on écrit : $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

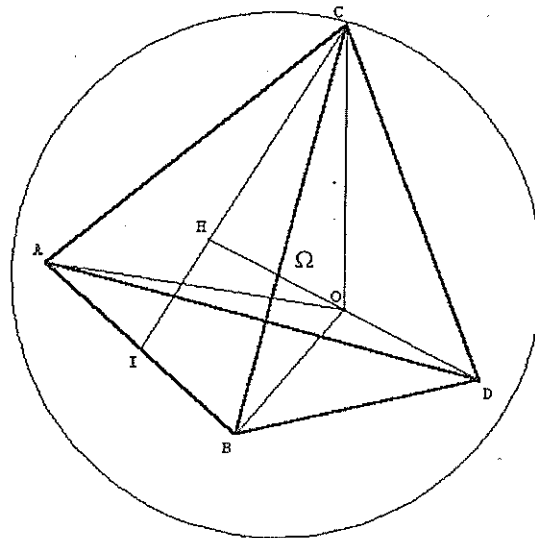
b. $OH = \frac{3V}{S}$, et donc $OH = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

1,5 points

4. a. On a donné plus haut une définition barycentrique de H.
- b. Cette longueur commune est $a\sqrt{2}$.
- c. Ω appartient au plan médiateur de chacune des segments [AB], [BC], [CA], donc à leur intersection (OH). On peut écrire $\Omega A = \Omega D$ comme une équation :

$$\left(x + \frac{a}{3}\right)^2 + \left(x + \frac{a}{3}\right)^2 + \left(x + \frac{a}{3}\right)^2 = (x - a)^2 + x^2 + x^2,$$

dont la solution est $\frac{a}{6}$. Le point Ω est le milieu de [OH] (ce qui peut aussi être trouvé avec un raisonnement barycentrique).



Exercice 2, pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité. Sur 5 points.

1,5 points

1. a. Des vecteurs normaux à ces plans ne sont pas colinéaires.
 b. On peut paramétrer par x ou z de façon presque immédiate.
 c. En considérant le point M de Δ d'abscisse 1 et son projeté N sur l'axe Ox , on trouve la distance MN égale à $\sqrt{7}$. Ce nombre est aussi la tangente du demi-angle au sommet du cône. D'où l'équation de celui-ci.

1 point

2. L'hyperbole est l'intersection de Γ avec un plan parallèle à l'axe du cône (une équation cartésienne d'un tel plan a un coefficient de x nul), le cercle est l'intersection du cône avec un plan perpendiculaire à Ox (donc d'équation $x = a$).

1,5 points

3. a. Le tableau ci-dessous donne les restes modulo 7 des entiers compris entre 0 et 6 :

x	0	1	2	3	4	5	6
x^2	0	1	4	9	16	25	36
Reste modulo 7	0	1	4	2	2	4	1

- b. Le tableau précédent donne la réponse à la question a. En additionnant deux quelconques des restes recensés à la troisième ligne, on trouve 0, 1, 2, 3, 4, 5 ou 6, et on ne trouve 0 qu'avec la somme $0 + 0$.

1 point

4. a. Les coordonnées de A vérifient : $b^2 + c^2 = 7a^2$.
 7 divise donc le premier membre, donc chacun des entiers b et c . Donc 49 divise le deuxième membre, donc 7 divise a^2 . Comme 7 est premier, 7 divise a .
 b. Une méthode de « descente » conduit au résultat.

Problème, commun à tous les candidats. Sur 11 points.

2 points

Partie A

1. L'unique solution de l'équation différentielle vérifiant $f(0) = N_0$ est définie par : $f(t) = N_0 e^{at}$.
2. La condition $f(T) = 2f(0)$ s'écrit : $a = \frac{1}{T} \ln 2$, d'où le résultat.

Partie B

3 points pour la question 1

1. a. g étant strictement positive et dérivable, g' l'est aussi. On écrit : $\left(\frac{1}{g}\right)'(t) + a\left(\frac{1}{g}\right)(t) = \frac{-g'(t) + ag(t)}{(g(t))^2}$ qui, en tenant compte de l'hypothèse exprimée par (E), donne l'implication demandée.
 b. Les solutions de (E') sont les fonctions f définies sur \mathbb{R} pour lesquelles on peut trouver un réel k tel que, pour tout réel t , $f(t) = \frac{1}{M} + ke^{-at}$.
 c. Si h est une solution strictement positive de (E'), h est dérivable sur \mathbb{R} et ne prend pas la valeur 0. Les calculs précédents

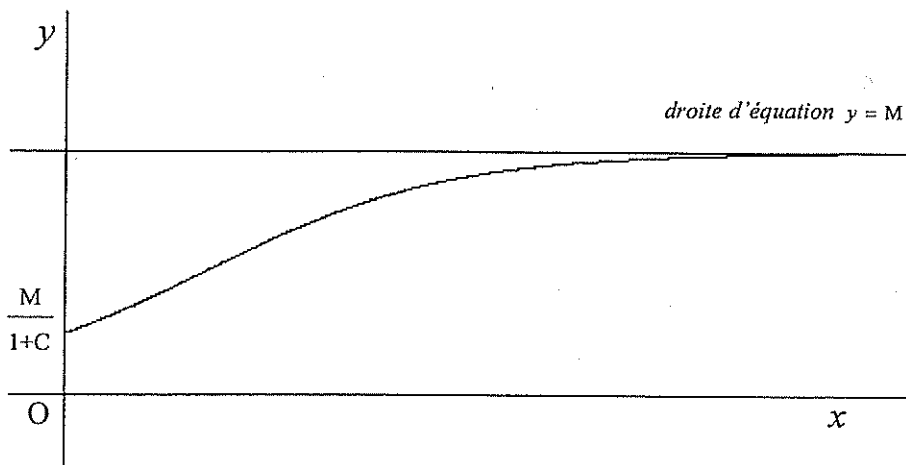
Cette « réciproque ne va nullement de soi.

4 points

peuvent alors être faits « à l'envers ».

2. a. Le dénominateur de l'expression définissant g peut être lu comme l'image du réel t par une fonction positive décroissante ayant pour limite 1 en $+\infty$. Cette observation fournit les résultats.
- b. La fonction g' a le signe de g , qui est donc croissante.

Cette courbe n'est pas demandée. Elle tient lieu de résumé de l'étude des variations.



La fonction g est continue et croissante sur \mathbb{R}^+ . Son minimum est $\frac{M}{1+C}$ et elle prend des valeurs supérieures à $\frac{M}{2}$. Donc elle prend la valeur $\frac{M}{2}$, en une seule occasion.

c. De $g' = ag - \frac{a}{M}g^2$, on déduit l'égalité demandée. Le signe de g'' est celui de $1 - \frac{2g}{M}$. L'existence et l'unicité de t_0 étaient prouvées par des considérations d'analyse. On trouve la valeur de t_0 en résolvant l'équation $\frac{M}{2} = \frac{M}{1+Ce^{-at}}$. Elle s'écrit aussi : $Ce^{-at} = 1$, et a pour solution $t_0 = \frac{1}{a} \ln C$.

Cette question peut être minimisée, car elle n'apporte rien.

d. Cette valeur moyenne est donnée par :

$$m = \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} \frac{M}{1+Ce^{-at}} dt, \text{ et elle s'écrit finalement : } m = aM \frac{\ln(2C) - \ln(C+1)}{\ln C}.$$

Partie C

2 points (car l'ensemble est peut-être un peu touffu)

1. On trouve $N_0 = 1$, $T = 0,5$ et $a = 2 \ln 2$.
2. Là encore, il ne s'agit que d'une identification.
3. *On n'a pas reproduit ci-dessous la figure à rendre, sur laquelle on perçoit clairement la réponse à la question suivante et la bonne adéquation du second modèle.*

Les deux premières heures sont la période de validité apparente de ce premier modèle.

