BACCALAUREAT GENERAL

Session 2004

MATHEMATIQUES

- Série S -

ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 7

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats

Le sujet est composé de 5 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie. La qualité et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 5 pages numérotées de 1 à 5

EXERCICE 1 (3 points)

Commun à tous les candidats

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2n + 3 \end{cases}$ pour tout entier naturel n.

1) Étudier la monotonie de la suite (u_n).

2) a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n > n^2$.
   b) Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

3) Conjecturer une expression de u_n en fonction de n, puis démontrer la propriété ainsi conjecturée.

EXERCICE 2 (5 points)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Dans l'ensemble **C** des nombres complexes, i désigne le nombre de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

1) Montrer que $(1 + \mathrm{i})^6 = -8\mathrm{i}$.

2) On considère l'équation (E) : $z^2 = -8\mathrm{i}$.
   a) Déduire de 1) une solution de l'équation (E).
   b) L'équation (E) possède une autre solution ; écrire cette solution sous forme algébrique.

3) Déduire également de 1) une solution de l'équation (E') : $z^3 = -8\mathrm{i}$.

4) On considère le point A d'affixe 2i et la rotation r de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.
   a) Déterminer l'affixe b du point B, image de A par r, ainsi que l'affixe c du point C, image de B par r.
   b) Montrer que b et c sont solutions de (E').

5) a) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique 2 cm), représenter les points A, B et C.
   b) Quelle est la nature de la figure que forment les images de ces solutions ?
   c) Déterminer le centre de gravité de cette figure.

EXERCICE 3 (4 points)

Commun à tous les candidats

Pour chaque question, une seule des quatre propositions est exacte.
Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.
Une réponse exacte rapporte 1 point ; une réponse inexacte enlève ½ point ; l'absence de réponse est comptée 0 point.
Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $\left(O\,;\,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on donne le point $S(1\,;-2\,;0)$ et le plan $\mathscr{P}$ d'équation $x+y-3z+4=0$.

1) Une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$ passant par le point S et perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$ est :

A : $\begin{cases} x=1+t \\ y=1-2t\,,\ t\in\mathbf{R} \\ z=-3 \end{cases}$ **B** : $\begin{cases} x=2+t \\ y=-1+t\,,\ t\in\mathbf{R} \\ z=1-3t \end{cases}$ **C** : $\begin{cases} x=1+t \\ y=-2-2t\,,\ t\in\mathbf{R} \\ z=3t \end{cases}$ **D** : $\begin{cases} x=2+t \\ y=-1+t\ ,\ t\in\mathbf{R} \\ z=-3-3t \end{cases}$

2) Les coordonnées du point d'intersection H de la droite $\mathscr{D}$ avec le plan $\mathscr{P}$ sont :

A : $(-4;0;0)$ **B** : $\left(\frac{6}{5};\frac{-9}{5};\frac{-3}{5}\right)$ **C** : $\left(\frac{7}{9};\frac{-2}{3};\frac{1}{3}\right)$ **D** : $\left(\frac{8}{11};\frac{-25}{11};\frac{9}{11}\right)$

3) La distance du point S au plan $\mathscr{P}$ est égale à :

A : $\frac{\sqrt{11}}{3}$ **B** : $\frac{3}{\sqrt{11}}$ **C** : $\frac{9}{\sqrt{11}}$ **D** : $\frac{9}{11}$

4) On considère la sphère de centre S et de rayon 3.

L'intersection de la sphère $\mathscr{S}$ et du plan $\mathscr{P}$ est égale :

A : au point $I(1\,;-5\,;0)$

B : au cercle de centre H et de rayon $r=3\sqrt{\frac{10}{11}}$

C : au cercle de centre S et de rayon $r=2$

D : au cercle de centre H et de rayon $r=\frac{3\sqrt{10}}{11}$

EXERCICE 4 (4 points)

Commun à tous les candidats

On s'intéresse à la durée de vie, exprimée en semaines, d'un composant électronique. On modélise cette situation par une loi de probabilité p de durée de vie sans vieillissement définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$: la probabilité que le composant ne soit plus en état de marche au bout de t semaines est $p([0 ; t[) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx$. Une étude statistique, montrant qu'environ 50 % d'un lot important de ces composants sont encore en état de marche au bout de 200 semaines, permet de poser $p([0 ; 200[) = 0{,}5$.

1) Montrer que $\lambda = \dfrac{\ln 2}{200}$.

2) Quelle est la probabilité qu'un de ces composants pris au hasard ait une durée de vie supérieure à 300 semaines ? On donnera la valeur exacte et une valeur approchée décimale au centième près.

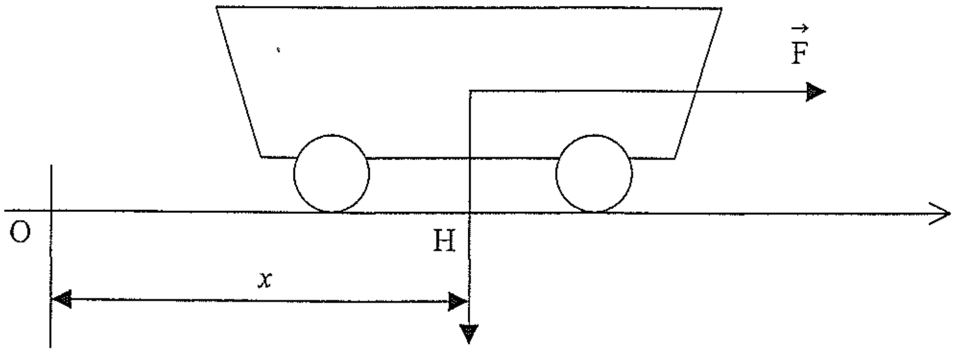
3) On admet que la durée de vie moyenne d_m de ces composants est la limite quand A tend vers $+\infty$ de $\int_0^A \lambda x e^{-\lambda x} dx$.

a) Montrer que $\int_0^A \lambda x e^{-\lambda x} dx = \dfrac{-\lambda A e^{-\lambda A} - e^{-\lambda A} + 1}{\lambda}$.

b) En déduire d_m ; on donnera la valeur exacte et une valeur approchée décimale à la semaine près.

EXERCICE 5 (4 points)

Commun à tous les candidats



Un chariot de masse 200 kg se déplace sur une voie rectiligne et horizontale. Il est soumis à une force d'entraînement constante $\vec{F}$ de valeur 50 N. Les forces de frottement sont proportionnelles à la vitesse et de sens contraire ; le coefficient de proportionnalité a pour valeur absolue 25 $N.m^{-1}.s^{-1}$.
La position du chariot est repérée par la distance x, en mètres, du point H à l'origine O du repère en fonction du temps t, exprimé en secondes. On prendra t dans l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
Les lois de Newton conduisent à l'équation différentielle du mouvement (E) $25x' + 200x'' = 50$, où :

x' est la dérivée de x par rapport au temps t,
x'' est la dérivée seconde de x par rapport au temps t.

1) On note $v(t)$ la vitesse du chariot au temps t ; on rappelle que $v(t) = x'(t)$. Prouver que x est solution de (E) si et seulement si x' est solution de l'équation différentielle (F) $v' = -\frac{1}{8}v + \frac{1}{4}$.
Résoudre l'équation différentielle (F).

2) On suppose que, à l'instant $t = 0$, on a : $x(0) = 0$ et $x'(0) = 0$.

a) Calculer, pour tout nombre réel t positif, $x'(t)$.

b) En déduire que l'on a, pour tout nombre réel t positif, $x(t) = 2t - 16 + 16e^{-t/8}$.

3) Calculer $V = \lim_{t \to +\infty} v(t)$. Pour quelles valeurs de t la vitesse du chariot est-elle inférieure où égale à 90 % de sa valeur limite V ?

4) Quelle est la distance parcourue par le chariot au bout de 30 secondes ? On exprimera cette distance en mètres, au décimètre près.

CORRIGE

Ces éléments de correction n'ont qu'une valeur indicative. Ils ne peuvent en aucun cas engager la responsabilité des autorités académiques, chaque jury est souverain.

BACCALAUREAT GENERAL

SESSION 2004

CORRIGE

MATHEMATIQUES

- Série S -

Ce corrigé comporte 3 pages numérotées de 1 à 3

ÉLÉMENTS DE CORRECTION

Il est rappelé que ce document est à l'usage exclusif des jurys. La règle de confidentialité relative aux commissions d'entente et aux travaux des jurys s'applique à son contenu.

EXERCICE 1 (3 points)

1) $u_{n+1} - u_n = 2n + 3$, donc $u_{n+1} - u_n > 0$ et la suite (u_n) est croissante.

2) a) Par récurrence : $u_0 = 1$, donc $u_0 > 0^2$ et, si $u_n > n^2$, alors $u_{n+1} > n^2 + 2n + 3 > n^2 + 2n + 1$, donc $u_{n+1} > (n + 1)^2$.

b) $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$, donc (u_n) a pour limite $+\infty$.

3) Conjecture de : pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = (n + 1)^2$ (par exemple à partir des premiers termes).
Preuve par récurrence : $u_0 = (0 + 1)^2$ et, pour $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = (n + 1)^2 + 2n + 3 = n^2 + 4n + 4$, c'est-à-dire $u_{n+1} = (n + 2)^2$; d'où le résultat.
Remarque : la question **3)** peut être résolue indépendamment de la question **2)**.

EXERCICE 2, non spécialistes (5 points)

1) On obtient $(1 + i)^6 = -8i$ de différentes façons, par exemple par module et argument ou par la formule du binôme.

2) a) $[(1 + i)^3]^2 = -8i$, donc $(1 + i)^3$ est une solution de (E).
b) $(-z)^2 = z^2$ donc $-(1 + i)^3$ est aussi solution de (E) ; sa forme algébrique est $2 - 2i$.

3) $[(1 + i)^2]^3 = -8i$, donc $(1 + i)^2$ (c'est-à-dire $2i$) est une solution de (E′).

4) a) La rotation r se traduit par $z' = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}z$, d'où $b = -\sqrt{3} - i$ et $c = \sqrt{3} - i$.
b) $b^3 = c^3 = -8i$, donc b et c sont aussi solution de (E′).

5) a) Points $A(0\ ;2)$, $B(-\sqrt{3}\,;-1)$, $C(\sqrt{3}\,;-1)$.
b) Le triangle ABC est équilatéral, car $AB = BC = CA = 2\sqrt{3}$.
c) $z_G = \dfrac{z_A + z_B + z_C}{3} = 0$, donc le centre de gravité du triangle ABC est le point O.

EXERCICE 2, spécialistes (5 points)

1) $1+x+x^2+...+x^{k-1}=\dfrac{x^k-1}{x-1}$ (somme des termes d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison $x \neq 1$). Donc : $(x-1)(1+x+x^2+...+x^{k-1})=(x-1)\dfrac{x^k-1}{x-1}=x^k-1$.

2) **a)** d est un diviseur positif de n donc il existe un entier positif k tel que $n = dk$. On a alors : $a^n-1=a^{rk}-1=(a^d)^k-1$. On applique le résultat de la question précédente avec x égal à a^d ; on obtient : $a^n-1=(a^d)^k-1=(a^d-1)(1+a^d+....+(a^d)^{k-1})$, donc a^d-1 divise a^n-1.

b) On a $7 = 2^3 - 1$ et 3 divise 2004, donc 7 divise $2^{2004} - 1$. De même, on a $63 = 2^6 - 1$ et 6 divise 2004, donc 63 divise $2^{2004} - 1$; comme 9 divise 63, 9 divise aussi $2^{2004} - 1$.

3) **a)** Comme d est le pgcd de m et n, m' et n' sont premiers entre eux et, d'après le théorème de Bézout, il existe deux entiers relatifs u et v' tels que : $um' + v'n' = 1$; alors $um'd + v'n'd = d$, c'est-à-dire $um + v'n = d$; ainsi $mu - nv = d$ avec $v = -v'$.

b) On a $d = mu - nv$, donc $(a^{mu}-1)-(a^{nv}-1)a^d=a^{mu}-1-a^{nv+d}+a^d=a^d-1$.

d divise m donc d divise mu d'où $a^d - 1$ divise $a^{mu} - 1$. De même, $a^d - 1$ divise $a^{nv} - 1$.

Posons $A=\dfrac{a^{mp}-1}{a^d-1}$ et $B=\dfrac{a^{nq}-1}{a^d-1}$; l'égalité précédente s'écrit alors $A - a^dB = 1$ donc, d'après le théorème de Bézout, A et B sont premiers entre eux et $a^d - 1$ est le pgcd de $a^{mu} - 1$ et de $a^{nv} - 1$.

c) On prend a = 2. En choisissant $mu = 63$ et $nv = 60$, donc $d = 3$ pour $m = 9$ et $n = 15$, le pgcd cherché est $2^3 - 1 = 7$ (d'autres choix sont possibles pour m, n, u et v).

EXERCICE 3 (4 points)

1) Les coordonnées de S(1, –2, 0) vérifient le système $\begin{cases} x=2+t \\ y=-1+t \\ z=-3-3t \end{cases}$ et on peut lire celles du vecteur directeur : (1, 1, – 3).	réponse **D**
2) Les coordonnées $\left(\dfrac{8}{11};\dfrac{-25}{11};\dfrac{9}{11}\right)$ vérifient : $\begin{cases} x=2+t \\ y=-1+t \\ z=-3-3t \\ x+y-3z+4=0 \end{cases}$.	réponse **D**
3) $d = SH = \sqrt{\dfrac{(11-8)^2+(-22+25)^2+(-9)^2}{11^2}}=\dfrac{3}{\sqrt{11}}$.	réponse **B**
4) le centre est H et le rayon r est solution de $SH^2 + r^2 = 9$, d'où $r=\sqrt{9-\dfrac{9}{11}}=3\sqrt{\dfrac{10}{11}}$.	réponse **B**

EXERCICE 4 (4 points)

1) $p([0\,;200[) = \int_0^{200} \lambda e^{-\lambda x}dx = 1 - e^{-200\lambda}$, donc $e^{-200\lambda} = 0,5$; d'où $\lambda = \frac{\ln 2}{200}$.

2) $p([300\,;+\infty[) = 1 - p([0\,;300[) = e^{-300\lambda} = e^{-\frac{3\ln 2}{2}}$, c'est-à-dire 0,35 ou 0,36.

3) **a)** Intégration par parties : $\int_0^A \lambda x e^{-\lambda x}dx = [-xe^{-\lambda x}]_0^A - \int_0^A -e^{-\lambda x}dx = \ldots = \frac{-\lambda A e^{-\lambda A} - e^{-\lambda A} + 1}{\lambda}$.

b) En prenant $x = -\lambda A$, on a $\lim\limits_{A\to+\infty} -\lambda A e^{-\lambda A} = \lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$ et $\lim\limits_{A\to+\infty} e^{-\lambda A} = \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$, donc

$d_m = \frac{1}{\lambda} = \frac{200}{\ln 2}$, c'est-à-dire 288 ou 289 semaines.

EXERCICE 5 (4 points)

1) On a $v = x'$, donc $v' = x''$; alors (E) $\Leftrightarrow 25v + 200v' = 50 \Leftrightarrow v' = -\frac{1}{8}v + \frac{1}{4}$.

Donc $v(t) = Ce^{-\frac{1}{8}t} + 2$, C étant une constante réelle.

2) **a)** On a $v(t) = x'(t) = Ce^{-\frac{1}{8}t} + 2$; la condition $x'(0) = 0$ permet de calculer $C = -2$; donc $x'(t) = -2e^{-\frac{1}{8}t} + 2$.

b) $x(t) = 16e^{-\frac{1}{8}t} + 2t + K$, et $x(0) = 0$; donc $x(t) = 16e^{-\frac{1}{8}t} + 2t - 16$.

3) $v(t) = 2 - 2e^{-\frac{1}{8}t}$; donc $V = 2$.
On résout dans $[0\,;+\infty[$ l'inéquation $v(t) \leqslant 0,9 \times 2$, c'est-à-dire $t \leqslant 8\ln 10$; ainsi $t \in [0\,;8\ln 10]$.

4) $d = x(30) = 44 + 16e^{-3,75}$; $d \approx 44,3$ ou $d \approx 44,4$ (en mètres).