

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2007

MATHÉMATIQUES

Série : **S**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures** – COEFFICIENT : **7**

Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1 à 5.

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

*Le candidat doit traiter tous les exercices.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour
une part importante dans l'appréciation des copies.*

Tournez la page S.V.P.

Exercice 1 (4 points)

Commun à tous les candidats

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère le plan P d'équation $2x + y - 2z + 4 = 0$ et les points A de coordonnées $(3, 2, 6)$, B de coordonnées $(1, 2, 4)$, et C de coordonnées $(4, -2, 5)$.

1.
 - a. Vérifier que les points A, B et C définissent un plan.
 - b. Vérifier que ce plan est le plan P .
2.
 - a. Montrer que le triangle ABC est rectangle.
 - b. Écrire un système d'équations paramétriques de la droite Δ passant par O et perpendiculaire au plan P .
 - c. Soit K le projeté orthogonal de O sur P . Calculer la distance OK .
 - d. Calculer le volume du tétraèdre $OABC$.

3. On considère, dans cette question, le système de points pondérés

$$S = \{(O, 3), (A, 1), (B, 1), (C, 1)\}.$$

- a. Vérifier que ce système admet un barycentre, qu'on notera G .
 - b. On note I le centre de gravité du triangle ABC . Montrer que G appartient à (OI) .
 - c. Déterminer la distance de G au plan P .
4. Soit Γ l'ensemble des points M de l'espace vérifiant :

$$\|3\overline{MO} + \overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC}\| = 5.$$

Déterminer Γ . Quelle est la nature de l'ensemble des points communs à P et Γ ?

Exercice 2 (5 points)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. Dans cette question, il est demandé au candidat d'exposer des connaissances

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Soit R la rotation du plan de centre Ω , d'affixe ω et d'angle de mesure θ . L'image par R d'un point du plan est donc définie de la manière suivante :

- $R(\Omega) = \Omega$

- pour tout point M du plan, distinct de Ω , l'image M' de M est définie par $\Omega M' = \Omega M$ et $(\overline{\Omega M}, \overline{\Omega M'}) = \theta [2\pi]$.

On rappelle que, pour des points A et B d'affixes respectives a et b , $AB = |b - a|$ et $(\vec{u}, \overline{AB}) = \arg(b - a) [2\pi]$.

Question : Montrer que les affixes z et z' d'un point quelconque M du plan et de son image M' par la rotation R , sont liées par la relation

$$z' - \omega = e^{i\theta} (z - \omega).$$

2. On considère les points I et B d'affixes respectives $z_I = 1 + i$ et $z_B = 2 + 2i$. Soit R la rotation de centre B et d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$.

a. Donner l'écriture complexe de R .

b. Soit A l'image de I par R . Calculer l'affixe z_A de A .

c. Montrer que O , A et B sont sur un même cercle de centre I . En déduire que OAB est un triangle rectangle en A . Donner une mesure de l'angle $(\overline{OA}, \overline{OB})$.

d. En déduire une mesure de l'angle (\vec{u}, \overline{OA}) .

3. Soit T la translation de vecteur \overline{IO} . On pose $A' = T(A)$.

a. Calculer l'affixe $z_{A'}$ de A' .

b. Quelle est la nature du quadrilatère $OIAA'$?

c. Montrer que $-\frac{\pi}{12}$ est un argument de $z_{A'}$.

Tournez la page S.V.P.

Exercice 3 (5 points)

Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln(x+3)}{x+3}$.

1. Montrer que f est dérivable sur $[0, +\infty[$. Étudier le signe de sa fonction dérivée f' , sa limite éventuelle en $+\infty$, et dresser le tableau de ses variations.
2. On définit la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ par son terme général $u_n = \int_n^{n+1} f(x) dx$.
 - a. Justifier que, si $n \leq x \leq n+1$, alors $f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$.
 - b. Montrer, sans chercher à calculer u_n , que, pour tout entier naturel n ,
$$f(n+1) \leq u_n \leq f(n).$$
 - c. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.
3. Soit F la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $F(x) = (\ln(x+3))^2$.
 - a. Justifier la dérivabilité sur $[0, +\infty[$ de la fonction F et déterminer, pour tout réel positif x , le nombre $F'(x)$.
 - b. On pose, pour tout entier naturel n , $I_n = \int_0^n f(x) dx$.
Calculer I_n .
4. On pose, pour tout entier naturel n , $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$.
Calculer S_n . La suite (S_n) est-elle convergente ?

Exercice 4 (6 points)

Commun à tous les candidats

Pour réaliser une enquête, un employé interroge des personnes prises au hasard dans une galerie commerçante. Il se demande si trois personnes au moins accepteront de répondre.

1. Dans cette question, on suppose que la probabilité qu'une personne choisie au hasard accepte de répondre est 0,1. L'employé interroge 50 personnes de manière indépendante. On considère les événements :
A : « au moins une personne accepte de répondre »
B : « moins de trois personnes acceptent de répondre »
C : « trois personnes ou plus acceptent de répondre ».

Calculer les probabilités des événements A, B et C. On arrondira au millième.

2. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3. Dans cette question, on suppose que la variable aléatoire X qui, à tout groupe de n personnes interrogées indépendamment, associe le nombre de personnes ayant accepté de répondre, suit la loi de probabilité définie par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Pour tout entier } k \text{ tel que } 0 \leq k \leq n-1, P(X = k) = \frac{e^{-a} a^k}{k!}, \\ \text{et } P(X = n) = 1 - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{e^{-a} a^k}{k!}, \\ \text{formules dans lesquelles } a = \frac{n}{10}. \end{array} \right.$$

- a. Montrer que la probabilité qu'au moins trois personnes répondent est donnée par :

$$f(a) = 1 - e^{-a} \left(1 + a + \frac{a^2}{2} \right).$$

- b. Calculer $f(5)$. En donner l'arrondi au millième. Cette modélisation donne-t-elle un résultat voisin de celui obtenu à la question 1 ?
3. On conserve le modèle de la question 2. On souhaite déterminer le nombre minimum de personnes à interroger pour que la probabilité que trois d'entre elles au moins répondent soit supérieure ou égale à 0,95.

- a. Étudier les variations de la fonction f définie sur \mathbf{R}^+ par $f(x) = 1 - e^{-x} \left(1 + x + \frac{x^2}{2} \right)$ ainsi que sa limite en $+\infty$. Dresser son tableau de variations.
- b. Montrer que l'équation $f(x) = 0,95$ admet une solution unique sur \mathbf{R}^+ , et que cette solution est comprise entre 6,29 et 6,3.
- c. En déduire le nombre minimum de personnes à interroger.

CORRIGE

Ces éléments de correction n'ont qu'une valeur indicative. Ils ne peuvent en aucun cas engager la responsabilité des autorités académiques, chaque jury est souverain.

**ÉLÉMENTS DE CORRECTION
 ET BARÈME INDICATIF PROPOSÉS**

N.B. : Il est rappelé que ce document est à l'usage exclusif des jurys. Les règles de confidentialité habituelles concernant les travaux des jurys, des commissions d'entente et des permanences téléphoniques s'appliquent à son contenu.

**Exercice 1 (4 points)
 Commun à tous les candidats**

0,25 point
 0,25 point

1. a. Les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} ne sont pas colinéaires.
 b. On vérifie par exemple que A et B appartiennent à P .

0,5 point
 0,5 point

2. a. Les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} sont orthogonaux.
 b. Cette droite est dirigée par un vecteur normal au plan P . Un système

$$\text{d'équations est donc } \begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = -2t \end{cases} .$$

0,5 point

- c. Cette distance est la distance de O à P . Elle est donnée par $d = \frac{|4|}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{4}{3}$.

0,5 point

- d. Le volume de ce tétraèdre est donné par $v = \frac{1}{3} d \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{AC}\|$, puisque le triangle ABC est rectangle. On trouve $v = \frac{8}{3}$.

0,25 point

3. a. La somme des poids n'est pas nulle.

0,5 point

- b. Le barycentre du système S est en effet le même que celui de $S' = \{(O, 3), (I, 3)\}$, d'après la propriété dite associativité. On peut même ajouter que G est le milieu de $[OI]$.

0,25 point

- c. Cette dernière remarque permet de conclure (droite des milieux) que la distance de G au plan P est la moitié de la distance de O à P . Elle est donnée par $d' = \frac{2}{3}$.

0,5 point

4. La relation $\|3\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 5$ s'écrit aussi $\|5\overrightarrow{MG}\| = 5$, où encore $\|\overrightarrow{MG}\| = 1$. Γ est donc la sphère de centre G et de rayon 1. La distance de son centre G au plan P étant inférieure à son rayon, l'intersection de la sphère et du plan est un cercle.

Exercice 2 (5 points)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1 point

1. Pour M distinct de Ω , le nombre complexe $\frac{z' - \omega}{z - \omega}$ a donc pour module 1 et pour argument θ . Sa forme exponentielle est donc : $\frac{z' - \omega}{z - \omega} = e^{i\theta}$, d'où le résultat, qu'il faut

1 point

compléter en vérifiant que la formule donnée tient pour $z = \omega$.

2. a. De l'écriture $z' - (2 + 2i) = e^{i\frac{\pi}{3}} (z - (2 + 2i))$, on déduit :

$$z' = \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) z + (1 + \sqrt{3}) + i(1 - \sqrt{3}).$$

0,5 point

b. On trouve $z_A = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + i \left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$.

1 point (à répartir)

c. Le calcul de $z_A - z_I$ donne : $z_A - z_I = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + i \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$. Donc $|z_A - z_I| = \sqrt{2}$ et

donc $IA = IB = IO$. Les points O , A et B sont situés sur le cercle de diamètre $[OB]$ et le triangle OAB est rectangle en A . Le triangle OAB est un « demi-triangle

équilatéral ». L'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ a pour mesure $\frac{\pi}{6}$.

0,25 point

d. Une mesure de $(\vec{u}, \overrightarrow{OA})$ est donc $\frac{\pi}{3}$.

0,5 point

3. a. $z_{A'} = z_A - 1 - i$

$$z_{A'} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} - i \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

0,25 point

b. Par définition de la translation, le quadrilatère $OIAA'$ est un parallélogramme.

0,5 point

c. $(\vec{u}, \overrightarrow{OA'}) = (\vec{u}, \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'})$

$(\vec{u}, \overrightarrow{OA'}) = (\vec{u}, \overrightarrow{OA}) - (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$, d'où le résultat.

Exercice 2 (5 points)

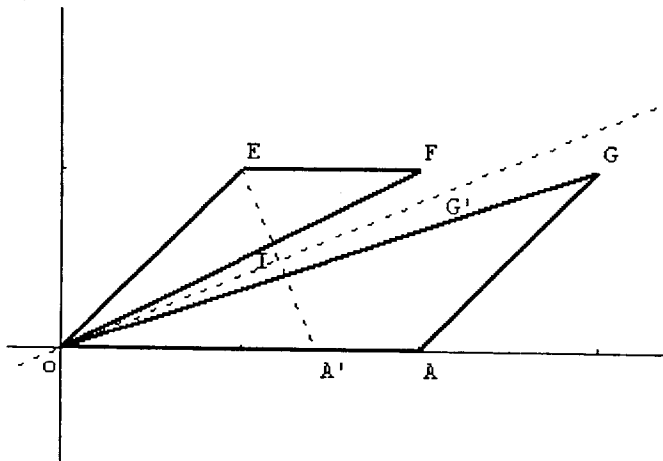
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1 point

1. On note E , F et G les images de A , B et C par s . La similitude réciproque de s est notée σ . Le produit des similitudes s' et σ possède trois points invariants, c'est donc l'identité. Donc s' est la réciproque de σ , c'est-à-dire s .

2.

figure 1 point



1 point

$OA = 2 \quad OE = \sqrt{2}$
 a. On obtient $OG = \sqrt{10} \quad OF = \sqrt{5}$. Les triangles sont donc semblables (le rapport des côtés homologues est $\frac{1}{\sqrt{2}}$).

1 point

b. On procède par identification en cherchant une écriture du type $z' = \alpha\bar{z} + \beta$. On trouve $\beta = 0$ puis $\alpha = \frac{1+i}{2}$.

1 point

c. Par l'homothétie h , les sommets du triangle OAG sont transformés en ceux du triangle $OA'G'$. Reste à vérifier que la droite (OI) est la médiatrice de $[EA']$ et de $[FG']$, pour prouver que le triangle OEF est l'image de OAG par le produit $\sigma \circ h$.

Exercice 3 (5 points)

Commun à tous les candidats

1,25 point (dont tableau)

1. La fonction f est le quotient de deux fonctions dérivables. Elle est dérivable, sa fonction dérivée est définie sur $[0, +\infty[$ par $f'(x) = \frac{1 - \ln(x+3)}{(x+3)^2}$. Elle est décroissante sur $[0, +\infty[$ et sa limite en $+\infty$ est 0 (résultat classique en posant $X = x+3$).

0,75 point

2. a. Cet encadrement résulte de la décroissance de f .

0,75 point

b. Cet encadrement résulte de la comparaison des intégrales sur l'intervalle $[n, n+1]$, des fonctions constantes égales respectivement à $f(n+1)$ et $f(n)$ et de la fonction f .

0,75 point

c. Les suites de terme général $f(n+1)$ et $f(n)$ respectivement sont convergentes ; elles convergent vers 0. Le théorème d'encadrement permet de déduire que la suite (u_n) converge également vers 0.

0,5 point

3. a. La fonction F est une puissance d'une fonction dérivable. Pour tout réel positif x , on peut écrire : $F'(x) = 2f(x)$.

0,5 point

b. $I_n = \frac{1}{2} \int_0^n 2f(x) dx$.

0,5 point

Donc $I_n = \frac{1}{2} [F(x)]_0^n = \frac{1}{2} ((\ln(n+3))^2 - (\ln(3))^2)$.

4. D'après les propriétés de l'intégrale, $S_n = \int_0^n f(x) dx = I_n$.

La suite (S_n) tend vers $+\infty$.

Exercice 4 (6 points)

Commun à tous les candidats

0,5 point

1. L'événement contraire de A a pour probabilité $(0,9)^{50}$. La probabilité de A est donc $1 - (0,9)^{50} \approx 0,995$ (valeur arrondie au millième).

L'événement B est la réunion des événements « 2 personnes répondent », « une personne répond » et « personne ne répond ». On a donc :

$$P(B) = \binom{50}{2} (0,9)^{48} (0,1)^2 + 50(0,9)^{49} (0,1) + (0,9)^{50}$$

0,75 point

On obtient $P(B) \approx 0,113$ (valeur arrondie au millième).

0,25 point

L'événement C est l'événement contraire de B , sa probabilité est donc :

$$P(C) = 1 - P(B) \approx 0,887$$

0,75 point

2. a. Cet événement est l'événement contraire de la réunion de trois événements (personne ne répond, une personne répond, deux personnes répondent). Il suffit d'appliquer la définition de la loi de probabilité donnée.

1 point

b. $f(5) = 1 - e^{-5} (1 + 5 + 12,5) \approx -0,875$ (valeur arrondie au millième). Ce résultat est assez proche de celui obtenu avec le modèle binomial.

1,25 point (avec tableau)

3. a. La fonction f est dérivable et on a pour tout réel positif x , $f'(x) = \frac{x^2}{2} e^{-x}$. Cette fonction est donc croissante, sa limite en $+\infty$ est 1.

1 point

b. La fonction f est continue et strictement croissante sur \mathbf{R}^+ . On a $f(6,29) < 0,95$ et $f(6,3) > 0,95$. Tout réel inférieur à 6,29 a une image inférieure à 0,95, tout réel supérieur à 6,3 a une image supérieure à 0,95. On achève le raisonnement par un théorème de bijection sur l'intervalle fermé $[6,29; 6,3]$.

0,5 point

c. Il est nécessaire d'interroger un minimum de 63 personnes pour que la probabilité que trois d'entre elles au moins répondent soit supérieure à 0,95.