BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2006

MATHÉMATIQUES

- Série S -

ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 7

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur

Du papier millimétré est mis à la disposition du candidat.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
La qualité et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 4 pages numérotées de 1 à 4.

EXERCICE 1 (5 points)

Commun à tous les candidats

Soit $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un repère orthonormal de l'espace.

On considère les points A(2,4,1), B(0,4,–3), C(3,1,–3), D(1,0,–2), E(3,2,–1), $I\left(\frac{3}{5}, 4, -\frac{9}{5}\right)$.

Pour chacune des cinq affirmations suivantes, dire, sans le justifier, si elle est vraie ou si elle est fausse.
Pour chaque question, il est compté un point si la réponse est exacte et zéro sinon.

1) Une équation du plan (ABC) est : $2x + 2y - z - 11 = 0$.

2) Le point E est le projeté orthogonal de D sur le plan (ABC).

3) Les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.

4) La droite (CD) est donnée par la représentation paramétrique suivante :

$$(CD)\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 1 - t \end{cases} \qquad (t \in \mathbf{R}).$$

5) Le point I est sur la droite (AB).

EXERCICE 2 (5 points)

Commun à tous les candidats

1) Soit f la fonction définie sur **R** par : $f(x) = x^2 \, \mathrm{e}^{1-x}$. On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(\mathrm{O} ; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

a) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$; quelle conséquence graphique pour $\mathscr{C}$ peut-on en tirer ?

b) Justifier que f est dérivable sur **R**. Déterminer sa fonction dérivée f'.

c) Dresser le tableau de variation de f et tracer la courbe $\mathscr{C}$.

2) Soit n un entier naturel non nul. On considère l'intégrale I_n définie par $\mathrm{I}_n = \int_0^1 x^n \, \mathrm{e}^{1-x} \mathrm{d}x$.

a) Établir une relation entre I_{n+1} et I_n.

b) Calculer I_1, puis I_2.

c) Donner une interprétation graphique du nombre I_2. On la fera apparaître sur le graphique de la question **1c)**.

3) **a)** Démontrer que pour tout nombre réel x de $[0 ; 1]$ et pour tout entier naturel n non nul, on a l'inégalité suivante : $x^n \leqslant x^n \, \mathrm{e}^{1-x} \leqslant \mathrm{e} \, x^n$.

b) En déduire un encadrement de I_n puis la limite de I_n quand n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 3 (5 points)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère le plan complexe P rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.
Dans tout l'exercice, P\{O} désigne le plan P privé du point origine O.

1) Question de cours

On prend comme pré-requis les résultats suivants :

- Si z et z' sont deux nombres complexes non nuls, alors : $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$ à $2k\pi$ près, avec k entier relatif.
- Pour tout vecteur $\vec{w}$ non nul d'affixe z on a : $\arg(z) = (\vec{u} ; \vec{w})$ à $2k\pi$ près, avec k entier relatif.

a) Soit z et z' des nombres complexes non nuls, démontrer que $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$ à $2k\pi$ près, avec k entier relatif.

b) Démontrer que si A, B, C sont trois points du plan, deux à deux distincts, d'affixes respectives a, b, c, on a : $\arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ à $2k\pi$ près, avec k entier relatif.

2) On considère l'application f de P\{O} dans P\{O} qui, au point M du plan d'affixe z, associe le point M′ d'affixe z' définie par : $z' = \dfrac{1}{\bar{z}}$. On appelle U et V les points du plan d'affixes respectives 1 et i.

a) Démontrer que pour $z \neq 0$, on a $\arg(z') = \arg(z)$ à $2k\pi$ près, avec k entier relatif.
En déduire que, pour tout point M de P\{O} les points M et M′ $= f(\text{M})$ appartiennent à une même demi-droite d'origine O.

b) Déterminer l'ensemble des points M de P\{O} tels que $f(\text{M}) = \text{M}$.

c) M est un point du plan P distinct de O, U, et V, on admet que M′ est aussi distinct de O, U, et V.

Établir l'égalité $\dfrac{z'-1}{z'-\mathrm{i}} = \dfrac{1}{\mathrm{i}}\left(\dfrac{\bar{z}-1}{\bar{z}+\mathrm{i}}\right) = -\mathrm{i}\,\overline{\left(\dfrac{z-1}{z-\mathrm{i}}\right)}$.

En déduire une relation entre $\arg\left(\dfrac{z'-1}{z'-\mathrm{i}}\right)$ et $\arg\left(\dfrac{z-1}{z-\mathrm{i}}\right)$.

3) a) Soit z un nombre complexe tel que $z \neq 1$ et $z \neq \mathrm{i}$ et soit M le point d'affixe z. Démontrer que M est sur la droite (UV) privée de U et de V si et seulement si $\dfrac{z-1}{z-\mathrm{i}}$ est un nombre réel non nul.

b) Déterminer l'image par f de la droite (UV) privée de U et de V.

EXERCICE 4 (5 points)

Commun à tous les candidats

1) Dans un stand de tir, un tireur effectue des tirs successifs pour atteindre un ballon afin de le crever. A chacun de ces tirs, il a la probabilité 0,2 de crever le ballon. Le tireur s'arrête quand le ballon est crevé. Les tirs successifs sont supposés indépendants.

a) Quelle est la probabilité qu'au bout de deux tirs le ballon soit intact ?

b) Quelle est la probabilité que deux tirs suffisent pour crever le ballon ?

c) Quelle est la probabilité p_n que n tirs suffisent pour crever le ballon ?

d) Pour quelles valeurs de n a-t-on : $p_n > 0{,}99$?

2) Ce tireur participe au jeu suivant :

Dans un premier temps il lance un dé tétraédrique régulier dont les faces sont numérotées de 1 à 4 (la face obtenue avec un tel dé est la face cachée) ; soit k le numéro de la face obtenue. Le tireur se rend alors au stand de tir et il a droit à k tirs pour crever le ballon.

Démontrer que, si le dé est bien équilibré, la probabilité de crever le ballon est égale à 0,4096 (on pourra utiliser un arbre pondéré).

3) Le tireur décide de tester le dé tétraédrique afin de savoir s'il est bien équilibré ou s'il est pipé. Pour cela il lance 200 fois ce dé et il obtient le tableau suivant :

Face k	1	2	3	4
Nombre de sorties de la face k	58	49	52	41

a) Calculer les fréquences de sorties f_k observées pour chacune des faces.

b) On pose $d^2 = \sum_{k=1}^{4}\left(f_k - \frac{1}{4}\right)^2$. Calculer d^2.

c) On effectue maintenant 1 000 simulations des 200 lancers d'un dé tétraédrique bien équilibré et on calcule pour chaque simulation le nombre d^2. On obtient pour la série statistique des 1000 valeurs de d^2 les résultats suivants :

Minimum	**D_1**	**Q_1**	**Médiane**	**Q_3**	**D_9**	**Maximum**
0,00124	0,00192	0,00235	0,00281	0,00345	0,00452	0,01015

Au risque de 10 %, peut-on considérer que ce dé est pipé ?

CORRIGE

Ces éléments de correction n'ont qu'une valeur indicative. Ils ne peuvent en aucun cas engager la responsabilité des autorités académiques, chaque jury est souverain.

ELEMENTS DE CORRECTION

Il est rappelé que ce document est à l'usage exclusif des jurys. La règle de confidentialité relative aux commissions d'entente et aux travaux des jurys s'applique à son contenu.

EXERCICE 1 (5 points)

1	2	3	4	5
V	F	V	F	V

EXERCICE 2 (5 points)

1) a) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{1-x} = +\infty$ d'où $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

Pour tout réel x, $f(x) = e\,\dfrac{x^2}{e^x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^2} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

L'axe des abscisses est asymptote à la courbe C en $+\infty$.

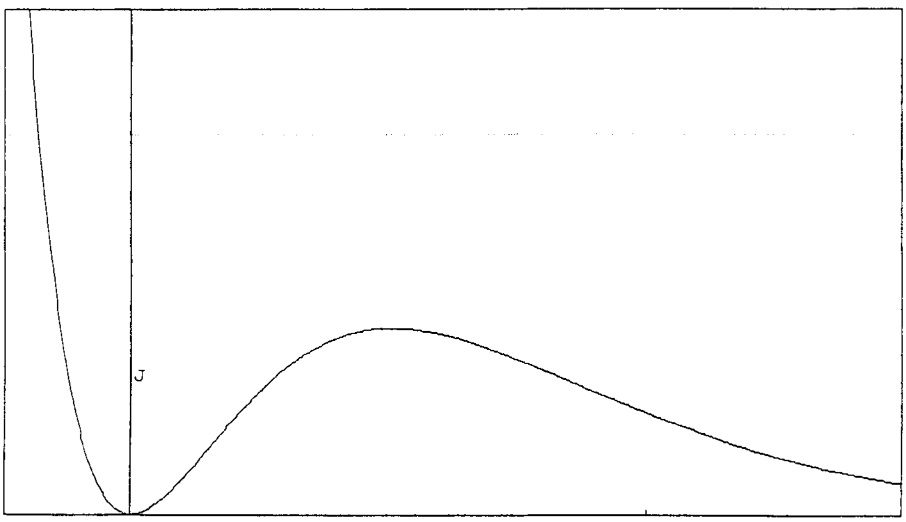
b) La fonction carré et la fonction composée exp$u$, où u est une fonction affine, sont dérivables sur **R** . f est dérivable sur **R** comme produit de fonctions dérivables.

Pour tout réel x, on obtient $f'(x) = (2x - x^2)\ e^{1-x}$.

c) $f'(x)$ est négatif sur $]-\infty\ ;0[$ et sur $]2\ ;+\infty[$ et $f'(x)$est positif sur $]0\ ;2[$. D'où les variations de f.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$\frac{4}{e}$	↘	0

Tracé de la courbe $\mathscr{C}$.



2) a) Une intégration par parties donne pour tout entier n non nul $I_{n+1} = (n+1)\,I_n - 1$.

b) Avec une intégration par parties, on obtient $I_1 = e - 2$.
Avec la question **a)** $I_2 = -1 + 2\,I_1 = 2\,e - 5$.

c) La fonction f est positive sur l'intervalle $[0\,;1]$. I_2 représente l'aire, en unité d'aire du domaine plan délimité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 0$.

3) a) Si $x \in [0\,;1]$; $0 \leqslant 1 - x \leqslant 1$. La fonction exponentielle est croissante donc $1 \leqslant e^{1-x} \leqslant e$.
x^n est positif donc pour tout x de $[0\,;1]$, on a $x^n \leqslant x^n e^{1-x} \leqslant e\,x^n$.

b) Par intégration de ces inégalités sur $[0\,;1]$, on obtient $\dfrac{1}{n+1} \leqslant I_n \leqslant \dfrac{e}{n+1}$.
Par application du théorème des gendarmes la limite de la suite (I_n) est 0.

EXERCICE 3 - ***Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité*** **(5 points)**

1) a) $\arg\left(z' \times \dfrac{1}{z'}\right) = \arg(1) = 0$ à $2k\pi$ près. Ainsi $\arg(\dfrac{1}{z'}) = -\arg(z')$ à $2k\pi$ près et

$\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg(z) + \arg\left(\dfrac{1}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$ à $2k\pi$ près.

b) $\arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right) = \arg(c-a) - \arg(b-a) = (\vec{u}\,,\overrightarrow{AC}) - (\vec{u}\,,\overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AC})$ à $2k\pi$ près.

2) a) $\arg(z') = -\arg(\bar{z}) = -(-\arg(z)) = \arg(z)$ à $2k\pi$ près.

Géométriquement cela signifie que : $(\vec{u}\,,\overrightarrow{OM'}) = (\vec{u}\,,\overrightarrow{OM})$, donc que les vecteurs

$\overrightarrow{OM'}$ et $\overrightarrow{OM}$ sont colinéaires et de même sens ou encore que M et M′ sont sur une même demi-droite d'origine O.

b) $f(M) = M \Leftrightarrow z = \dfrac{1}{\bar{z}} \Leftrightarrow z\bar{z} = 1 \Leftrightarrow |z| = 1$

L'ensemble cherché est le cercle de centre O et de rayon 1.

c) $\dfrac{z'-1}{z'-i} = \dfrac{\dfrac{1}{\bar{z}} - 1}{\dfrac{1}{\bar{z}} - i} = \dfrac{1-\bar{z}}{1 - i\bar{z}} = \dfrac{\bar{z}-1}{i\bar{z}-1} = \dfrac{\bar{z}-1}{i\bar{z}+i^2} = \dfrac{1}{i} \times \dfrac{\bar{z}-1}{\bar{z}+i} = -i \times \overline{\left(\dfrac{z-1}{z-i}\right)}$

D'après l'énoncé, $z \neq 1$, $z \neq i$, $z' \neq 1$, $z' \neq i$ et

$\arg\left(\dfrac{z'-1}{z'-i}\right) = \arg(-i) - \arg\left(\dfrac{z-1}{z-i}\right) = -\dfrac{\pi}{2} - \arg\left(\dfrac{z-1}{z-i}\right)$ à $2k\pi$ près.

3) a) Dire que M appartient à la droite (UV) privée de U et de V équivaut à dire qu'il existe un réel k non nul tel que $\overrightarrow{UM} = k\overrightarrow{VM}$ qui se traduit aussi par : $\dfrac{z-1}{z-i}$ est un réel k non nul.

b) M appartient à la droite (UV) privée de U et de V équivaut à dire que $\dfrac{z-1}{z-i}$ est un réel non nul donc $\arg\left(\dfrac{z-1}{z-i}\right)$ égale 0 ou π (à $2k\pi$ près) donc avec la relation vue en 2-c : M appartient à la droite (UV) privée de U et de V équivaut à dire que $\arg\left(\dfrac{z'-1}{z'-i}\right)$ égale $\dfrac{\pi}{2}$ ou $-\dfrac{\pi}{2}$ (à $2k\pi$ près) ou encore, M′ appartient au cercle de diamètre [UV] privé de U et de V.

L'image par f de (UV) privée de U et de V est le cercle de diamètre [UV] privé de U et de V.

EXERCICE 3 - ***Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité*** **(5 points)**

Partie A

1) Théorème de Bézout - Théorème de GAUSS

2) Démonstration :

Soient a, b et c trois entiers tels que a divise bc et a et b sont premiers entre eux. Il existe 2 entiers u et v tels que : $au + bv = 1$ ce qui donne $acu + bcv = c$ (1). Il existe un entier q tel que $bc = aq$(2). (1) et (2) entraînent $a(cu + qv) = c$ et a divise c.

Partie B

1) 19 et 12 sont premiers entre eux ; d'après le théorème de Bézout, il existe un couple $(u\,,\,v)$ d'entiers relatifs tel que $19u + 12v = 1$.
$6\times 19u \equiv 0\ (19)$ donc $N \equiv 13\times 12v\ (19)$
Or, $12v \equiv 1\ (19)$ donc $N \equiv 13\ (19)$. De même : $13\times 12v \equiv 0\ (12)$ donc $N \equiv 6\times 19u\ \ 12)$.
Or, $19u \equiv 1\ (12)$ donc $N \equiv 6\ (12)$

2) a) L'équivalence résulte directement de la propriété de transitivité de la relation de congruence.

b) Si $\begin{cases} n \equiv n_0(19) \\ n \equiv n_0(12) \end{cases}$ alors $n - n_0$ est divisible par 12 et par 19.

Il existe alors un entier relatif p tel que $n - n_0 = 12p$. Les nombres 19 et 12 sont premiers entre eux donc, d'après le théorème de Gauss, 19 divise $12p$ d'où $n - n_0 \equiv 0\ (12\times 19)$.
Réciproquement, si $n - n_0$ est divisible par 12×19, alors $n - n_0$ est divisible par 12 et par 19.

3) a) En utilisant par exemple l'algorithme d'Euclide étendu, on obtient $(u_0\,, v_0) = (-5{,}8)$.
Ainsi N = 678 est solution de (S).

b) D'après la question **2)**, l'ensemble solution de (S) est $\Sigma = \{678 + 12\times 19q\ ; q \in \mathbf{Z}\}$.

4) n est un élément de Σ, donc $n \equiv 678\ (228)$. Le nombre n et le nombre 678 ont le même reste r dans la division euclidienne par 228, d'où $r = 222$.

EXERCICE 4 (5 points)

1) Les tirs sont indépendants et pour chacun la probabilité d'atteindre le ballon est p = 0,2.

a) Chacun des 2 tirs est un échec ; la probabilité cherchée est $0,8^2 = 0,64$.

b) Deux tirs suffisent pour crever le ballon est l'événement contraire du précédent : « au bout de 2 tirs le ballon est intact ». La probabilité cherchée est $1 - 0,64 = 0,36$.

c) « n tirs suffisent pour crever le ballon » est l'événement contraire de « au bout de n tirs le ballon est intact » : $p_n = 1 - 0,8^n$.

d) La résolution de $p_n > 0,99$ donne $n > \dfrac{\ln(0,01)}{\ln(0,8)}$ avec $\dfrac{\ln(0,01)}{\ln(0,8)} \approx 20,6$.

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 21 on a $p_n > 0,99$.

2) Pour chaque valeur de k avec $1 \leqslant k \leqslant 4$, la probabilité de crever le ballon est la probabilité p_k calculée en **1)c)** : $p_k = 1 - 0,8^k$.
Le dé n'est pas pipé, donc chaque face a la même probabilité de sortie, égale à 0,25.
La probabilité de crever le ballon est $0,25(p_1 + p_2 + p_3 + p_4) = 0,4096$.

3) a)

Face k	1	2	3	4
Fréquence f_k	0,29	0,245	0,26	0,205

b) $d^2 = 0,00375$

c) $d^2 < D_9$, donc au risque de 10 %, il n'y a pas lieu de considérer que le dé est pipé.